a) **▶ Angeben je einer Geradengleichung für die Blickrichtung beider Astronomen** (7P)

Im Moment der Entdeckung des Meteoriten blicken beide Astronomen entlang je einer Geraden zu dem Meteoriten. In diesem Aufgabenteil sollst du die Geradengleichungen dieser beiden Geraden bestimmen. Die dazu nötigen Informationen entnimmst du dem Aufgabentext.

Eine Geradengleichung besteht im Allgemeinen aus einem Stützvektor, dies ist der Ortsvektor eines beliebigen Punktes, der auf der Geraden liegt, und einem Richtungsvektor, der die Richtung der Geraden beschreibt. Da beide Geraden die jeweilige Blickrichtung der Astronomen beschreiben sollen, kannst du die Ortsvektoren ihrer Standpunkte A und B als Stützvektoren der Geraden verwenden und die Vektoren u_1 und u_2 als Richtungsvektoren.

Damit erhältst du folgende zwei Geradengleichungen g (erster Astronom) und h (zweiter Astronom):

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \qquad h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}8\\21\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

▶ Bestimmen der Koordinaten des Punktes P_1

Im Moment der Entdeckung befindet sich der Meteorit im Punkt P_1. Deine Aufgabe ist es nun die Koordinaten dieses Punktes P_1 zu bestimmen.
Da der Meteorit zu diesem Zeitpunkt von beiden Astronomen gesehen wird, muss er sowohl auf der Geraden g als auch auf der Geraden h liegen. P_1 ist also genau der Schnittpunkt der beiden Geraden. Um diesen zu bestimmen musst du g mit h gleichsetzen und anschließend das daraus entstehende LGS lösen.

$$\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\21\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Damit erhältst du folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{I} & 5 + 2r & = & 8 + s & \\
\text{II} & 6 + r & = & 21 - s & \\
\text{III} & 0 + 3r & = & 0 + 2s & \mid :2 \\
\hline
\text{IIIa} & 1{,}5r & = & s & \mid \text{Einsetzen von } s = 1{,}5r \text{ in I} \\
\hline
\text{Ia} & 5 + 2r & = & 8 + 1{,}5r & \mid -5 \\
 & 2r & = & 3 + 1{,}5r & \mid -1{,}5r \\
 & 0{,}5r & = & 3 & \mid \cdot 2 \\
 & r & = & 6 & \mid \text{Einsetzen von } r = 6 \text{ in IIIa} \\
\hline
 & s & = & 1{,}5\cdot 6 & \\
 & s & = & 9 &
\end{array}$$

Setzen nun noch $s = 9$ und $r = 6$ in die Gleichung II ein um die Ergebnisse zu verifizieren.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{II} & 6+6 & = & 21-9 \\
\text{II} & 12 & = & 12
\end{array}$$

Setze nun entweder $r = 6$ in g oder $s = 9$ in h ein um die Koordinaten des Schnittpunkts P_1 zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} + 6\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\6\\18\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}17\\12\\18\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= \begin{pmatrix}8\\21\\0\end{pmatrix} + 9\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\21\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\-9\\18\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}17\\12\\18\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Punkt P_1 in dem sich der Meteorit im Moment der Entdeckung befindet, hat also die Koordinaten $P_1(17\,|\,12\,|\,18)$.

b) ▶ **Bestimmen der Geschwindigkeit v des Meteoriten** (10P)

Der Meteorit bewegt sich gleichförmig auf einer geradlinigen Bahn. Eine Minute nach seiner Entdeckung hat er den Punkt $P_2(35\,|\,30\,|\,15)$ erreicht. Hier ist es nun deine Aufgabe die Geschwindigkeit v des Meteoriten in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu bestimmen.
Der Abstand des Punktes P_1 zum Punkt P_2 entspricht der Strecke, in Kilometer, die der Meteorit in einer Minute zurückgelegt hat, also der Geschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Diese musst du dann noch mit $60\,\frac{\text{min}}{\text{h}}$ multiplizieren um die Geschwindigkeit v des Meteoriten in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu erhalten.
Der Abstand der beiden Punkte P_1 und P_2 ist definiert durch den Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$. Für den Betrag eines Vektors $\overrightarrow{x}$ gilt allgemein:

$$|\overrightarrow{x}| = \left|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Bestimme also zunächst den Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$, indem du den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1}$ vom Ortsvektor $\overrightarrow{OP_2}$ subtrahierst.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}35\\30\\15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}17\\12\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\18\\-3\end{pmatrix}$$

Bestimme nun den Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$ wie oben beschrieben.

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}18\\18\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{18^2 + 18^2 + (-3)^2} = \sqrt{657} \approx 25,6$$

Der Meteorit hat also eine Geschwindigkeit von $v \approx 25,6\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Multipliziere diese nun mit $60\,\frac{\text{min}}{\text{h}}$.

$$25{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 25{,}6\cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1536\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Meteorit hat also eine Geschwindigkeit von $v \approx 1536\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

► Berechnen des Aufschlagpunkts P_3

In diesem Aufgabenteil sollst du nun den Aufschlagpunkt P_3 des Meteoriten auf der Erdoberfläche berechnen.
Die Erdoberfläche wird dabei durch die x-y-Ebene beschrieben. Alle Punkte dieser Ebene haben daher die z-Koordinate Null. Du musst also zunächst mit Hilfe des zuvor bestimmten Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$ eine Geradengleichung p für die Flugbahn des Meteoriten aufstellen. Dann setzt du in diese $z = 0$ ein und bestimmst die dazu passende x- und y-Koordinate. Damit hast du die Koordinaten des Aufschlagpunkt P_3 bestimmt, dieser entspricht nämlich dem Schnittpunkt von p und der Erdoberfläche.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Aufstellen der Geradengleichung von p
2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von P_3

1. Schritt: Aufstellen der Geradengleichung von p

Stelle nun analog zum Aufgabenteil a) eine Geradengleichung p für die Flugbahn des Meteoriten auf. Verwenden dazu den Ortsvektor des Punkts P_1 als Stützvektor und den bereits bestimmten Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Richtungsvektor.

$$p:\ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}17\\12\\18\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}18\\18\\-3\end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von P_3

Setze nun $z = 0$ in die Geradengleichung von p ein und bestimme die x- und y-Koordinate.

$$p:\ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}17\\12\\18\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}18\\18\\-3\end{pmatrix}$$

Damit erhältst du folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl|l}
\text{I} & x &=& 17 + 18k & \\
\text{II} & y &=& 12 + 18k & \\
\text{III} & 0 &=& 18 - 3k & +3k \\
\hline
\text{IIIa} & 3k &=& 18 & :3 \\
 & k &=& 6 & \text{Einsetzen von } k = 6 \text{ in I und II} \\
\hline
\text{Ia} & x &=& 17 + 18\cdot 6 & \\
 & x &=& 125 & \\
\hline
\text{IIa} & y &=& 12 + 18\cdot 6 & \\
 & y &=& 120 &
\end{array}$$

Der Auftreffpunkt P_3 hat also die Koordinaten $P_3(125\,|\,120\,|\,0)$.

▸ Berechnen des Aufschlagwinkels α

Hier ist es nun deine Aufgabe den Aufschlagwinkel α des Meteoriten zu berechnen. Dieser entspricht dem Schnittwinkel zwischen der x-y-Ebene und der Geraden p. Um diesen zu bestimmen, benötigst du einen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der x-y-Ebene. Da diese sich nur in x-y-Richtung verläuft, ist jeder Vektor, der Parallel zur z-Achse gerichtet ist, ein Normalenvektor der x-y-Ebene. Wähle für $\overrightarrow{n}$ also zum Beispiel:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{n}$ senkrecht zur x-y-Ebene ist, entspricht der Winkel β zwischen $\overrightarrow{n}$ und p genau $\beta = 90° - \alpha$. Sei $\overrightarrow{m}$ der Richtungsvektor von p so gilt für β:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{m}|}\right)$$

Berücksichtigst du nun noch die für Sinus und Kosinus geltende Regeln, so folgt:

$$\cos(\beta) = \sin(90° - \beta) = \sin(\alpha)$$

Für den gesuchten Winkel α gilt daher:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{m}|}\right)$$

Setze nun $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{m}$ in diese Gleichung ein und bestimme so den Aufschlagwinkel α.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{m}|}\right) \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}\right) \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{|0 \cdot 18 + 0 \cdot 18 + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{18^2 + 18^2 + (-3)^2}}\right) \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{3}{1 \cdot 25,6}\right) \\
&\approx \sin^{-1}(0,117) \\
&\approx 6,7°
\end{aligned}$$

Für den Aufschlagwinkel α des Meteoriten gilt also: $\alpha \approx 6,7°$.

c) **▶ Bestimmen des Punktes Q, in dem der Meteorit dem Punkt S am nächsten ist** (4P)

Die Spitze eines Berges befindet sich im Punkt $S(85\,|\,63\,|\,2)$. Deine Aufgabe ist es nun die Koordinaten des Punktes Q, in dem der Meteorit dem Punkt S am nächsten ist, zu bestimmen. Dafür muss der Vektor von Q nach S senkrecht zur Geraden p, entlang derer sich der Meteorit bewegt, verlaufen. Dazu benötigst du die Gleichung einer Ebene E , die als Normalenvektor den Vektor $\overrightarrow{m}$ besitzt, also senkrecht zu p verläuft, und den Punkt S enthält. Dann bestimmst du den Schnittpunkt von E und p. Dieser entspricht dem gesuchten Punkt Q, denn verbindet man ihn mit S so liegt diese Strecke in E und ist somit senkrecht zu p.
Für die Normalenform der Ebene E gilt:

$$E: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 85 \\ 63 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Durch Ausmultiplizieren erhältst du die Koordinatenform von E:

$$E: (x-85)\cdot 18 + (y-63)\cdot 18 + (z-2)\cdot(-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E: 6x + 6y - z = 886$$

Setze nun die einzelnen Koordinaten x, y und z der Geradengleichung von p ein und löse nach k auf.

$$\begin{aligned} 886 &= 6\cdot(17+18k) + 6\cdot(12+18k) - (18-3k) \\ 886 &= 102 + 108k + 72 + 108k - 18 + 3k \\ 886 &= 156 + 219k && |\ -156 \\ 730 &= 219k && |\ :219 \\ k &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Setzt jetzt $k = \dfrac{10}{3}$ in p ein:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + \frac{10}{3}\cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 72 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Meteorit ist also im Punkt $Q(77\,|\,72\,|\,8)$ der Spitze des Berges am nächsten.

d) **▶ Bestimmen des Abstands d zwischen Meteoritenbahn und Flugbahn** (5P)

In diesem Aufgabenteil sollst du nun den Abstand d zwischen der Meteoritenbahn, die durch die Gerade p beschrieben wird, und der Flugbahn f eines Flugzeugs bestimmen. Gesucht ist also der Abstand der zwei Geraden p und f. Dazu ist es wichtig zunächst über deren Lagebeziehung bescheid zu wissen.
Zwei Geraden im dreidimensionalen Raum können in den vier folgenden Lagebeziehungen zueinander stehen:

- Zwei Geraden sind **parallel**, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.
- Zwei Geraden **schneiden** sich, wenn sie einen eindeutigen Schnittpunkt besitzen.
- Zwei Geraden sind **identisch**, wenn sie parallel sind und der Stützvektor der einen Geraden auf der anderen Geraden liegt.
- Zwei Geraden sind **windschief**, wenn sie weder parallel zueinander verlaufen noch einen Schnittpunkt besitzen.

Du musst also überprüfen ob die Richtungsvektoren von p und f Vielfache von einander sind. Dazu multiplizierst du einen der beiden Richtungsvektoren mit einem Parameter und setzt sie dann miteinander gleich.

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhältst du folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llrcl|l}
\text{I} & & 18a &=& 3 & :18 \\
\text{II} & & 18a &=& 0 & :18 \\
\text{III} & & -3a &=& 1 & :(-3) \\
\hline
\text{Ia} & & a &=& \frac{1}{6} & \\
\text{IIa} & & a &=& 0 & \\
\text{IIIa} & & a &=& -\frac{1}{3} &
\end{array}$$

Da du nicht in allen drei Gleichungen einen einheitlichen Wert für a erhältst sind die beiden Richtungsvektoren keine Vielfache von einander. p und f sind also weder parallel noch identisch.

Nun musst du die Geradengleichungen von p und f miteinander gleichsetzen um die Geraden auf einen möglichen Schnittpunkt zu untersuchen.

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 47 \\ 32 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Damit erhältst du folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcl|l}
\text{I} & 10 + 3s &=& 17 + 18k & \\
\text{II} & 47 &=& 12 + 18k & -12 \\
\text{III} & 32 + s &=& 18 - 3k & \\
\hline
\text{IIa} & 35 &=& 18k & :18 \\
 & \frac{35}{18} &=& k & \text{Einsetzen von } k = \frac{35}{18} \text{ in I} \\
\hline
\text{Ia} & 10 + 3s &=& 17 + 18 \cdot \frac{35}{18} & \\
 & 10 + 3s &=& 52 & -10 \\
 & 3s &=& 42 & :3 \\
 & s &=& 14 & \text{Einsetzen von } k = \frac{35}{18} \text{ und } s = 14 \text{ in III} \\
\hline
\text{IIIa} & 32 + 14 &\overset{?}{=}& 18 - 3 \cdot \frac{35}{18} & \\
 & 46 &\overset{?}{=}& 18 - \frac{35}{6} & \\
 & 46 &\neq& \frac{73}{6} &
\end{array}$$

Da du keine Werte für s und k bestimmen kannst, sodass alle drei Gleichungen lösbar sind, haben p und f keinen Schnittpunkt.

Da die Richtungsvektoren nicht parallel zueinander verlaufen und f und p keinen gemeinsamen Punkt besitzen, verlaufen die Meteoritenbahn und die Flugbahn des Flugzeugs also windschief zueinander.

Um nun den Abstand d dieser beiden Geraden voneinander zu bestimmen, benötigst du den Verbindungsvektor zweier unbekannter Punkte, von denen einer auf p und einer auf f liegt. Ist dieser Verbindungsvektor sowohl senkrecht zum Richtungsvektor von p als auch senkrecht zum Richtungsvektor von f, so entspricht sein Betrag dem gesuchten Abstand d. Zwei Vektoren sind genau dann senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.
Ein unbekannter Punkt U_1 auf der Geraden p hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OU_1} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17+18k \\ 12+18k \\ 18-3k \end{pmatrix}$$

und ein unbekannter Punkt U_2 auf der Geraden f hat den Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OU_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 47 \\ 32 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+3s \\ 47 \\ 32+s \end{pmatrix}$$

Für den Verbindungsvektor gilt somit:

$$\overrightarrow{U_1U_2} = \begin{pmatrix} 10+3s \\ 47 \\ 32+s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17+18k \\ 12+18k \\ 18-3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s-7-18k \\ 35-18k \\ 14+s+3k \end{pmatrix}$$

Setze nun die Skalarprodukte von $\overrightarrow{U_1U_2}$ und den Richtungsvektoren von p und f mit Null gleich. Dadurch erhältst du ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen.

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{U_1U_2} \circ \overrightarrow{p} \\
0 &= \begin{pmatrix} 3s-7-18k \\ 35-18k \\ 14+s+3k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} \\
0 &= (3s-7-18k)\cdot 18 + (35-18k)\cdot 18 + (14+s+3k)\cdot(-3) \\
0 &= 54s - 126 - 324k + 630 - 324k - 42 - 3s - 9k \\
0 &= 51s - 657k + 462 \\
0 &= 17s - 219k + 154
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{U_1U_2} \circ \overrightarrow{f} \\
0 &= \begin{pmatrix} 3s-7-18k \\ 35-18k \\ 14+s+3k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
0 &= (3s-7-18k)\cdot 3 + (35-18k)\cdot 0 + (14+s+3k)\cdot 1 \\
0 &= 9s - 21 - 54k + 14 + s + 3k \\
0 &= 10s - 7 - 51k
\end{aligned}$$

Damit erhältst du also folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl l}
\text{I} & 0 &=& 17s - 219k + 154 & \\
\text{II} & 0 &=& 10s - 51k - 7 & \mid \text{Rechne: } 10\cdot\text{I} - 17\cdot\text{II} \\
\hline
\text{IIa} & 0 &=& -1323k + 1659 & \mid +1323k \\
& 1323k &=& 1659 & \mid : 1323 \\
& k &=& \frac{79}{63} & \\
\hline
\text{IIb} & 0 &=& 10s - 51\cdot\frac{79}{63} - 7 & \\
& 0 &=& 10s - \frac{4470}{63} & \mid +\frac{4470}{63} \\
& \frac{4470}{63} &=& 10s & \mid : 10 \\
& \frac{4470}{630} &=& s & \\
& \frac{149}{21} &=& s &
\end{array}$$

Setze nun $k = \frac{79}{63}$ und $s = \frac{149}{21}$ in den Verbindungsvektor ein und bestimme seinen Betrag und damit den Abstand d.

$$\begin{aligned}
d &= \left| \begin{pmatrix} 3\cdot\frac{149}{21} - 7 - 18\cdot\frac{79}{63} \\ 35 - 18\cdot\frac{79}{63} \\ 14 + \frac{149}{21} + 3\cdot\frac{79}{63} \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} -\frac{58}{7} \\ \frac{87}{7} \\ \frac{174}{7} \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{58}{7}\right)^2 + \left(\frac{87}{7}\right)^2 + \left(\frac{174}{7}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{41209}{49}} \\
&= \sqrt{841} \\
&= 29
\end{aligned}$$

Der Abstand zwischen Meteoritenbahn und Flugzeugbahn beträgt also 29 km.

e) ► **Ermitteln der Koordinaten des Punktes R** (4P)

Eine Radarstation im Punkt $T(107 \mid 102 \mid 3)$ erfasst alle Flugbewegungen innerhalb eines kugelförmigen Raumes mit einem Radius von 50 km. Deine Aufgabe ist es nun die, auf ganze Zahlen gerundeten, Koordinaten des Punktes R, in dem der Meteorit auf dem Radarschirm der Station erstmalig auftaucht, zu ermitteln. Dazu musst du zunächst die Gleichung der Kugel K aufstellen, die den Rand des Radarbereichs beschreibt. Für eine Kugelgleichung benötigt man allgemein die Koordinaten des Mittelpunkts $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$ und den Radius r der Kugel. Damit erhält man dann folgende allgemeine Kugelgleichung:

$$K: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \right]^2 = r^2$$

Hast du die Gleichung von K aufgestellt, so setzt du die einzelnen Koordinaten x, y und z der Geradengleichung von p ein und löst nach k auf. Durch Einsetzen der Lösungen für k in p erhältst du die Koordinaten der Schnittpunkte von K und p. Danach musst du noch entscheiden welcher der Schnittpunkte der gesuchte Punkt R ist, den der Meteorit zuerst erreicht. Durch den Richtungsvektor m von p nehmen die x- und y-Koordinaten der Punkte an denen sich der Meteorit befindet zu und die z-Koordinate nimmt ab. Der Schnittpunkt mit der höchsten z-Koordinaten und den niedrigsten x- und y-Koordinaten ist daher dann der gesuchte Punkt R, denn er befindet sich näher am Ausgangspunkt des Meteoriten.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Aufstellen der Kugelgleichung der Kugel K
2. Schritt: Bestimmen der Schnittpunkte von K und p
3. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von R

1. Schritt: Aufstellen der Kugelgleichung der Kugel K

Die Radarstation im Punkt $T(107 \mid 102 \mid 3)$ entspricht hier dem Mittelpunkt der Kugel K und der erfasste Bereich hat den selben Radius $r = 50\,\text{km}$ wie die Kugel K. Setze dies nun in die allgemeine Gleichung einer Kugel ein:

$$K: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 107 \\ 102 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 2500$$

2. Schritt: Bestimmen der Schnittpunkte von K und p

Setze nun die einzelnen Koordinaten x, y und z der Geradengleichung von p in K ein und löse nach k auf.

$$\begin{aligned}
2500 &= \left[\begin{pmatrix} 17+18k \\ 12+18k \\ 18-3k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 107 \\ 102 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 \\
2500 &= \left[\begin{pmatrix} 18k-90 \\ 18k-90 \\ 15-3k \end{pmatrix}\right]^2 \\
2500 &= \begin{pmatrix} 18k-90 \\ 18k-90 \\ 15-3k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 18k-90 \\ 18k-90 \\ 15-3k \end{pmatrix} \\
2500 &= (18k-90)^2 + (18k-90)^2 + (15-3k)^2 \\
2500 &= 324k^2 - 3240k + 8100 + 324k^2 - 3240k + 8100 + 225 - 90k + 9k^2 \\
2500 &= 657k^2 - 6570k + 16425 && \mid -2500 \\
0 &= 657k^2 - 6570k + 13925
\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung kannst du nun mit der Mitternachtsformel oder alternativ mit der pq-Formel lösen.
Lösung per Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned}
k_{1,2} &= \frac{-(-6570) \pm \sqrt{(-6570)^2 - 4 \cdot 657 \cdot 13925}}{2 \cdot 657} \\
&= \frac{6570 \pm \sqrt{43164900 - 36594900}}{1314} \\
&= \frac{6570 \pm \sqrt{6570000}}{1314} \\
&\approx \frac{6570 \pm 2563,2}{1314} \\
k_1 &\approx \frac{6570 + 2563,2}{1314} \\
k_1 &\approx \frac{9133,2}{1314} \\
k_1 &\approx 7 \\
k_2 &\approx \frac{6570 - 2563,2}{1314} \\
k_2 &\approx \frac{4006,8}{1314} \\
k_2 &\approx 3
\end{aligned}$$

Lösung über pq-Formel:

$$\begin{aligned}
0 &= 657k^2 - 6570k + 13925 \qquad |:657 \\
0 &= k^2 - 10k + \frac{13925}{657} \\
k_{1,2} &= -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{-10}{2}\right)^2 - \frac{13925}{657}} \\
&= 5 \pm \sqrt{25 - \frac{13925}{657}} \\
&\approx 5 \pm \sqrt{3,8} \\
&\approx 5 \pm 2 \\
k_1 &\approx 5 + 2 \\
&\approx 7 \\
k_2 &\approx 5 - 2 \\
k_2 &\approx 3
\end{aligned}$$

Setze nun $k_1 = 7$ und $k_2 = 3$ in p ein.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OS_1} &= \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 126 \\ 126 \\ -21 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 143 \\ 138 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS_2} &= \begin{pmatrix}17\\12\\18\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}18\\18\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\12\\18\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}54\\54\\-9\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}71\\66\\9\end{pmatrix}\end{aligned}$$

K und p haben also die beiden Schnittpunkte $S_1(143\,|\,138\,|\,-3)$ und $S_2(71\,|\,66\,|\,9)$.

3. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von R

Entscheide nun anhand der oben beschriebenen Kriterien welcher der beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 der gesuchte Punkt R ist.
Da S_2 eine größere z-Koordinate und kleinere x- und y-Koordinaten als S_1 besitzt entspricht S_2 dem gesuchten Punkt R mit den Koordinaten $R(71\,|\,66\,|\,9)$.