Teil 1

1) a) ► **Maximaler Definitionsbereich von f** (2BE)

Der maximale Definitionsbereich gibt an, welche Werte x annehmen darf. Die Funktion f ist eine Logarithmus-Funktion des natürlichen Logarithmus $y = \ln(t)$. Er ist **nur** für $t > 0$ definiert.

In unserem Fall mit $f(x) = \ln(x+3)$ muss also gelten: $x + 3 > 0$.

Forme diese Ungleichung so um, dass sie die Form $x > \dots$ besitzt.

► **Ableitungsfunktion von f**

Allgemein hat die Ableitung f' einer Funktion f mit $f(x) = \ln x$ die Funktionsgleichung $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Im vorliegenden Fall ergibt sich durch den Term innerhalb des Logarithmus eine Verkettung der Funktion. Somit musst du sie nach der Kettenregel ableiten

b) ► **Maximaler Definitionsbereich von g** (3BE)

Die Funktion g ist eine gebrochenrationale Funktion. Der Nenner einer gebrochenrationalen Funktion darf nie 0 werden. Somit darf x keine Werte annehmen, für die dies eintreten würde.

► **Ableitungsfunktion von g**

Da die Funktion g eine gebrochenrationale Funktion ist, musst du hier die Quotientenregel anwenden, um die Funktion abzuleiten.

2) a) ► **Funktion f angeben mit $H(0\,|\,5)$** (2BE)

H soll der Hochpunkt des Graphen der Funktion f sein. Überlege, was ein möglichst einfaches Beispiel für eine solche Funktion ist: eine **nach unten geöffnete** Normalparabel mit Scheitelpunkt $H(0\,|\,5)$.

Die Scheitelpunktform einer Parabel lautet allgemein $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$, wobei $(x_S\,|\,y_S)$ die Koordinaten des Scheitelpunktes sind.

Hinweis: Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben, für $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet.

b) ► **Funktion g angeben** (2BE)

Als Kriterium wird hier die Tatsache genannt, dass die Funktion an der Stelle $x = 5$ nicht differenzierbar ist.

Eine Funktion h mit $h(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

Überlege, wie der Funktionsterm verändert werden muss, um die nicht-differenzierbare Stelle bei $x = 5$ zu erhalten.

3) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$

a) ► **Benachbarte Nullstellen angeben** (2BE)

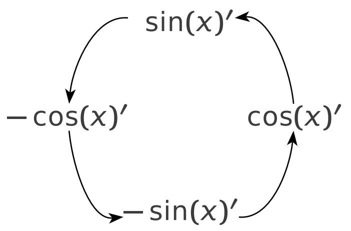
Nullstellen finden sich bei einer Sinus-Funktion, die nicht verschoben ist, immer an der Stelle $x = 0$ und dann jeweils im Abstand von einer halben Periode zueinander.

Die Periode lässt sich über die Formel $p = \dfrac{2\cdot\pi}{q}$ bestimmen, wobei die Sinusfunktion $f(x) = \sin(q\cdot x)$ lautet.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$

b) ► **Das Integral bestimmen** (5BE)

Die Stammfunktion von Sinus- und Kosinusfunktionen wird nach folgender Regel bestimmt:



Merkhilfe Trig-Kreis

Über **lineare Substitution** ergibt sich die Stammfunktion

► **Unterschiede zwischen Integral und Fläche**

Im ersten Teil der Aufgabe hast du gezeigt, dass f bei $x = \frac{\pi}{2} \approx 1,73$ eine Nullstelle besitzt. Diese Nullstelle liegt im Intervall $[0;2]$.

Damit wissen wir: im Bereich von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ verläuft der Graph von f **oberhalb** der x-Achse. Im Bereich von $x = \frac{\pi}{2}$ bis $x = 2$ verläuft er **unterhalb** der x-Achse.

Überlege, wie der Flächeninhalt eigentlichen berechnet werden müsste und wie er sich dann durch das eben berechnete Integral unterscheidet.

4) ► **Skizze erstellen** (4BE)

Überlege zunächst, wie f und f' zusammenhängen:

- $f'(x)$ gibt an jeder Stelle x die Steigung von f an.
- die Extremstellen von f sind Nullstellen von f'.
- die Wendestellen von f sind Extremstellen von f'
- wo der Graph von f steigt, verläuft der Graph von f' oberhalb der x-Achse und umgekehrt

Teil 2

1) a) ▸ **Achsenschnittpunkt herausfinden** (2BE)

Ein Achsenschnittpunkt kann sowohl ein Schnittpunkt der Graphen mit der x-Achse, aber auch der y-Achse sein. Folglich müssen wir beiden Fälle prüfen.

Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat allgemein die Koordinaten $S_y\,(0\,|\,f(0))$, der Schnittpunkt mit der x-Achse $S_x\,(x\,|\,0)$.

b) ▸ **Verhalten für $\boldsymbol{x \to -\infty}$** (2BE)

Für $\boldsymbol{x} \to -\infty$ strebt die e-Funktion gegen Null; für $x \to \infty$ strebt e^x gegen ∞.
Betrachte auf dieser Grundlage jeweils getrennt Zähler und Nenner des Funktionsterms und überlege, was für große Werte von x geschieht.

c) ▸ **Strenge Monotonie beweisen** (3BE)

Eine strenge Monotonie liegt dann vor, wenn der Graph nie eine Steigung von 0 besitzt und sich sein Funktionswert mit wachsenden x erhöht.
Bilde also zunächst die erste Ableitung von f und zeige dann, dass gilt: $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) ▸ **Tangente an $\boldsymbol{S}$ bestimmen** (2BE)

Eine Tangente t ist eine Gerade und hat damit allgemein die Funktionsgleichung $t(x) = m \cdot x + b$. Dabei ist m die **Steigung** der Tangente und b ist ihr **$\boldsymbol{y}$-Achsenabschnitt**.
Die Steigung von t stimmt überein mit der Steigung von G_f im Berührpunkt $S\left(0\,|\,\frac{1}{5}\right)$. Diese wird dir gegeben durch die erste Ableitung. Es gilt also: $m = f'(0)$.

e) ▸ **Flächeninhalt berechnen** (4BE)

Die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ ist eine Parallele zur y-Achse und verläuft damit **senkrecht**.
Die Koordinatenachsen und die Gerade $x = 4$ geben dir damit die Grenzen vor, innerhalb derer die Fläche eingeschlossen wird: $x = 0$ und $x = 4$.
Berechne den Inhalt der Fläche durch Integration.

f) ▸ **Umkehrbarkeit begründen** (6BE)

Eine Funktion ist dann umkehrbar, wenn sie im betrachteten Bereich streng monoton ist.

▸ **Graph zeichnen**

Die Graphen von f und f^{-1} sind Spiegelungen voneinander an der ersten Winkelhalbierenden. Die erste Winkelhalbierende beschreibt die Gerade g mit $g(x) = x$.
Du kannst den Graphen der Funktion f an der Geraden g spiegeln, indem du senkrecht zu g die Punkte G_f spiegelst und einzeichnest.

▸ **Definitions- und Wertebereich**

Aufgrund der Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden gilt für Umkehrfunktionen die Regel $W_f = D_{f^{-1}}$ und $D_f = W_{f^{-1}}$.

2) a) ► **Wachstum in den ersten 2 Monaten** (2BE)

$f(x)$ gibt dir die Höhe der Sonnenblume zu einem bestimmten Zeitpunkt x an. Dabei entspricht x der Zeit in Monaten.

Gefragt ist nach dem Wachstum der Sonnenblume in den ersten zwei Monaten, also nach der **Höhendifferenz** zwischen dem zweiten Monat ($x = 2$) und Beobachtungsbeginn ($x = 0$).

b) ► **Zeitpunkt berechnen** (5BE)

$f(x)$ gibt dir die Höhe der Sonnenblume in Metern an. Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die Sonnenblume die Höhe 1,5 m erreicht.

Setze also $f(x) = 1,5$ und löse die Gleichung.

► **Beschreibung der graphischen Überprüfung**

Zeichne den Graphen von f, sowie die Gerade $y = 1,5$. Sie verläuft parallel zur x-Achse und veranschaulicht die Höhe 1,5 m.

c) ► **Punkt des schnellsten Wachstums bestimmen** (5BE)

Der Punkt des schnellsten Wachstums beschreibt den Punkt des Graphen, an dem die Steigung des Graphen maximal wird. Dieser Punkt wird Wendepunkt genannt und zeichnet sich dadurch aus, dass an der Stelle des Wendepunkts der Graph der ersten Ableitung ein Extremum aufweist.

Bei einer Betrachtung des Graphen kannst du feststellen, dass dieses Extremum der Steigung im Bereich $2 \leq x \leq 2,5$ auftritt. Demzufolge muss sich der Wendepunkt W in diesem Bereich befinden.

Zur graphischen Bestimmung kannst du so vorgehen:

- Lege 2 parallele Geraden p_1 und p_2 an den Graphen an, die den Graphen aber nur berühren, und sich oberhalb und unterhalb des abgeschätzten Punktes W befinden.
- Markiere die Berührpunkte B_1 und B_2 der beiden Geraden.
- Verbinde B_1 und B_2 eine Gerade g und betrachte deren Schnittpunkt mit Graphen G_f. Er ist dann der gesuchte Wendepunkt.

► **Maximale Wachstumsrate an *W* bestimmen**

Die Wachstumsrate beschreibt die Steigung des Graphen in dem bestimmten Punkt W. Sie kann näherungsweise zeichnerisch über eine Tangente an W bestimmt werden. Die Steigung der Tangente, die du über ein Steigungsdreieck ausmachen kannst, gibt dann eine Aussage über die Steigung des Graphen an dieser Stelle.

Folglich musst du eine Tangente t im Wendepunkt W anlegen und dann ihre Steigung mittels eines Steigungsdreiecks und der Formel $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bestimmen.

Denke daran: x gibt die Zeit in Monaten an. Gesucht ist allerdings die Wachstumrate in cm pro Tag.

d) ► **Aussage des Biologen prüfen** (4BE)

Der Biologe nimmt an, dass sich das Wachstum in den zwei Wochen **vor** Beobachtungsbeginn durch die Tangente t aus Aufgabenteil 1d beschreiben lässt.

Geprüft werden soll nun, ob dieses Modell den Zeitpunkt des Auskeimens korrekt beinhaltet. Da die Zeit auf der x-Achse in Monaten abgetragen wird, findet das Auskeimen zum Zeitpunkt $x = -0,5$ statt. Zu diesem Zeitpunkt ist die Pflanze noch Null Meter hoch.

Das Modell ist also korrekt, wenn gilt: $t(-0,5) = 0$.

e) ► **Gründe gegen *I* und *II*** (4BE)

Die Aufgabe gibt die Randbedingungen, dass die Sonnenblume genauso hoch werden soll wie die vorherige, dies allerdings in der Hälfte der Zeit.

Somit muss gelten $f(0) = g(0)$, $f(2 \cdot x) = g(x)$ aber auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Betrachte nun die Funktionsterme I und II und versuche sie, durch den Term $f(x)$ zu beschreiben. Gehe auch darauf ein, wie der Graph von f durch diese Änderungen beeinflusst wird und wie diese Änderungen im Sachzusammenhang interpretiert werden können.

f) ► **Wert von *k* angeben** (1BE)

Den Wert von k erhältst du über die Aussage, dass $g(x) = f(2 \cdot x)$. Dies setzt du in den Funktionsterm von f ein, um die Funktionsterme zu vergleichen und dann k herauszulesen.