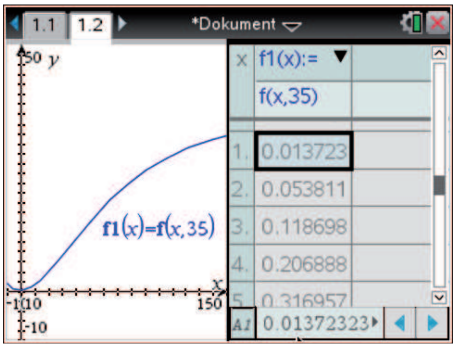
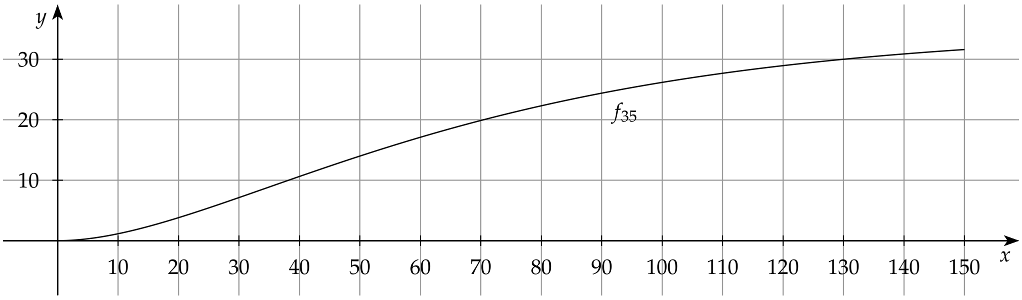
a) (1) ▶ **Graphen von f_{35} zeichnen** (14P)

Nutze dein CAS, um eine erste Vorstellung vom Graphen von f_{35} zu bekommen. Zeichne dazu den Graphen im `Graphs`-Modus und lasse dir eine Wertetabelle anzeigen. Überlege außerdem, welche Informationen du bereits über die Funktion f_{35} bestimmt hast.

Die Wertetabelle kannst du im `Graphs`-Modus mit `menu → 7 → 1` oder mit `ctrl + T` einblenden.





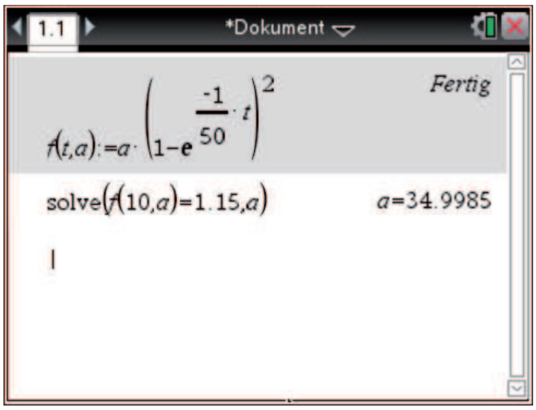
(2) ▶ **Parameterwert a berechnen**

Nach 10 Jahren ist die Buche 1,15 m hoch. Laut Aufgabenstellung wird für die Funktion f_a die Zeit auf der t-Achse in Jahren abgetragen. Für die Funktion f_a, die das Wachstum dieser Buche beschreibt, muss also gelten:

$f_a(10) = 1,15$.

Löse diese Gleichung nach a auf. Nutze dazu den `solve`-Befehl.

Das CAS liefert den Wert $a \approx 35$.



Für $a \approx 35$ beschreibt die Funktion f_a eine Buche, die nach 10 Jahren 1,15 m hoch ist.

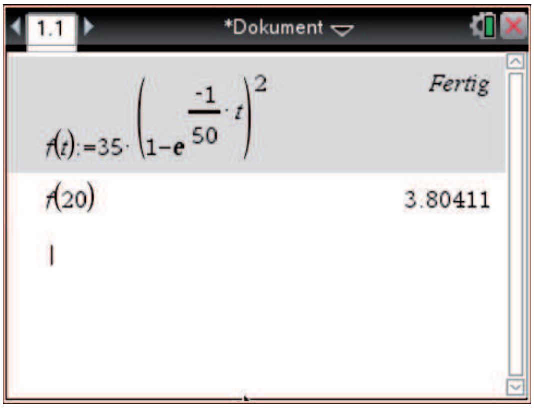
Die zugehörige Funktionsgleichung ist dann

$f_{35}(t) = 35 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t})^2$.

(3) ▶ **$f(20)$ berechnen und interpretieren**

Setze $t = 20$ in die Funktionsgleichung von f ein. Beachte bei der Interpretation, dass die Funktionswerte von f die Höhe der Buche zum Zeitpunkt t angibt. Alternativ kannst du den Funktionswert auch mit dem CAS berechnen.

$$f(20) = 35 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}\cdot 20})^2$$
$$= 35 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0{,}4})^2 \approx 3{,}8$$



Es ergibt sich $f(20) \approx 4{,}1$.

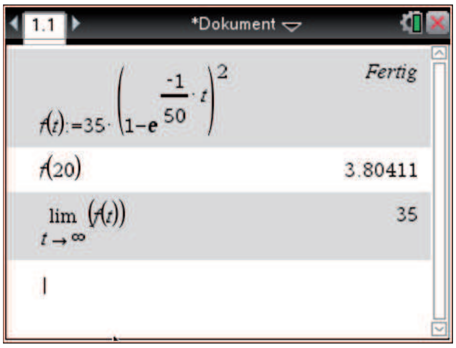
Im Sachzusammenhang heißt das: Nach 20 Jahren ist die Buche etwa 4,1 m hoch.

(4) ► **Maximale Höhe der Buche begründen**

In der Modellierung wird die Höhe der Buche durch die Funktion f beschrieben. Die Buche kann nicht höher als 35 m hoch werden, wenn die Funktionswerte von f niemals größer als 35 m werden.

Du weißt aus dem Graphen, dass sich der Graph von f für $t \to \infty$ einer waagerechten Asymptote annähert und damit vermutlich einen **Grenzwert** besitzt. Untersuche also das Verhalten der Funktionswerte von f für $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\left(35 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}\right)^2\right)$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(35 \cdot \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{50}t}}\right)^2\right)$$



Für große Werte von t nimmt der Wert $\mathrm{e}^{\frac{1}{50}t}$ sehr große Werte an. Der Bruch $\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{50}t}}$ geht also für große Werte von t gegen Null:

$$= \lim_{t\to\infty}\left(35 \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{50}t}}}_{\to 0}\right)^2\right)$$
$$= 35 \cdot (1-0)^2 = 35$$

Damit hast du gezeigt, dass sich der Graph von f für große Werte von f der Asymptote $y = 35$ annähert. Die Funktionswerte nähern sich für große Werte von t also immer weiter dem Wert 35 an, erreichen ihn aber nie ganz.

Im Sachzusammenhang interpretiert heißt das: Die Buche wächst immer weiter und nähert sich der Höhe 35 m immer näher an, erreicht sie aber nie ganz. Sie kann also nicht höher als 35 m werden.

b) ▶ **Zeitpunkt des stärksten Wachstums berechnen** (9P)

Die Funktion f beschreibt die Höhe der Buche. Die erste Ableitung f' beschreibt die **Änderungsrate** des Höhenwachstums, also die Wachstumsgeschwindigkeit. Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die Buche am stärksten wächst, also die maximale Wachstumsgeschwindigkeit.

Berechne deshalb das Maximum von f'. Dies ist zugleich die Wendestelle von f.

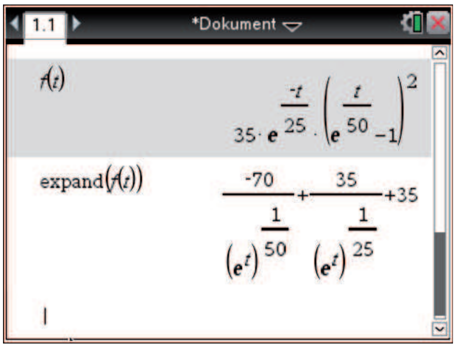
Ein Maximum t_M von f' liegt dann vor, wenn die notwendige und die hinreichende Bedingung erfüllt sind:

- $f''(t_M) = 0$
- $f'''(t_M) < 0$; alternativ Vorzeichenwechsel-Kriterium

Bilde zunächst die ersten drei Ableitungen von f nach der Kettenregel, löse dann die Gleichung $f''(t) = 0$ und setze die potentielle Wendestelle in f''' ein. Du kannst das CAS nutzen, um den Funktionsterm von f zu vereinfachen, z.B. mit dem `expand`-Befehl.

1. Schritt: Ableitungen bilden

Wende den `expand`-Befehl auf den Funktionsterm $f(t)$ an. So erhältst du eine vereinfachte, ausmultiplizierte Form des Funktionsterms und kannst die Ableitungen leichter bilden.



Mit dem CAS ergibt sich so:

$$\begin{aligned} f(t) &= -70 \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{50}t}} + 35 \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{25}t}} + 35 \\ &= -70e^{-\frac{1}{50}t} + 35e^{-\frac{1}{25}t} + 35 \end{aligned}$$

Bilde die Ableitungen nun ausgehend von diesem Funktionsterm.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -70 \cdot \left(-\frac{1}{50}\right) e^{-\frac{1}{50}t} + 35 \cdot \left(-\frac{1}{25}\right) e^{-\frac{1}{25}t} \\ &= 1,4e^{-\frac{1}{50}t} - 1,4e^{-\frac{1}{25}t} \\ &= 1,4 \cdot \left(e^{-\frac{1}{50}t} - e^{-\frac{1}{25}t}\right) \\ f''(t) &= 1,4 \cdot \left(-\frac{1}{50}e^{-\frac{1}{50}t} - \left(-\frac{1}{25}\right) e^{-\frac{1}{25}t}\right) && \mid \tfrac{1}{50} \text{ ausklammern} \\ &= 1,4 \cdot \frac{1}{50} \cdot \left(-e^{-\frac{1}{50}t} + 2e^{-\frac{1}{25}t}\right) \\ &= 0,028 \cdot \left(-e^{-\frac{1}{50}t} + 2e^{-\frac{1}{25}t}\right) \\ f'''(t) &= 0,028 \cdot \left(-\left(-\frac{1}{50}\right) e^{-\frac{1}{50}t} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{25}\right) e^{-\frac{1}{25}t}\right) && \mid -\tfrac{1}{50} \text{ ausklammern} \\ &= 0,028 \cdot \frac{1}{50} \cdot \left(e^{-\frac{1}{50}t} - 2 \cdot 2e^{-\frac{1}{25}t}\right) \\ &= 0,00056 \cdot \left(e^{-\frac{1}{50}t} - 4e^{-\frac{1}{25}t}\right) \end{aligned}$$

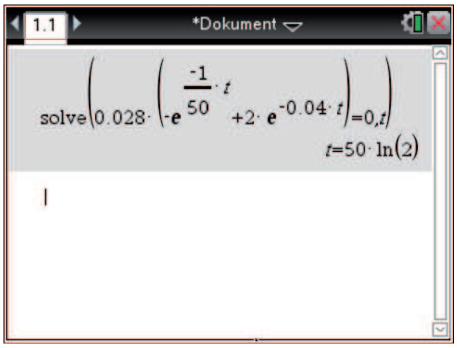
2. Schritt: Notwendiges Kriterium prüfen

Setze $f''(t) = 0$ und löse nach t auf.

$$0{,}028 \cdot \left(-e^{-\frac{1}{50}t} + 2e^{-\frac{1}{25}t}\right) = 0 \qquad |:0{,}028$$
$$-e^{-\frac{1}{50}t} + 2e^{-\frac{1}{25}t} = 0$$
$$-e^{-\frac{1}{50}t} + 2e^{-2\cdot\frac{1}{50}t} = 0 \qquad \text{Potenzgesetze}$$
$$-e^{-\frac{1}{50}t} + 2(e^{-\frac{1}{50}t})^2 = \;|\; e^{-\frac{1}{50}t} \text{ ausklammern}$$
$$e^{-\frac{1}{50}t} \cdot \left(-1 + 2e^{-\frac{1}{50}t}\right) = 0$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. Da der Ausdruck $e^{-\frac{1}{50}t}$ niemals Null werden kann, genügt es, den zweiten Faktor zu betrachten.

$$-1 + 2e^{-\frac{1}{50}t} = 0 \qquad |\; +1$$
$$2e^{-\frac{1}{50}t} = 1 \qquad |:2$$
$$e^{-\frac{1}{50}t} = \frac{1}{2} \qquad |\; \ln(\,)$$
$$-\frac{1}{50}t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad |:(-\tfrac{1}{50})$$
$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{50}}$$
$$= -50 \cdot \ln(2^{-1}) \qquad \text{Potenzgesetze}$$
$$= -50 \cdot \ln(2) \cdot (-1)$$
$$= 50\ln(2)$$

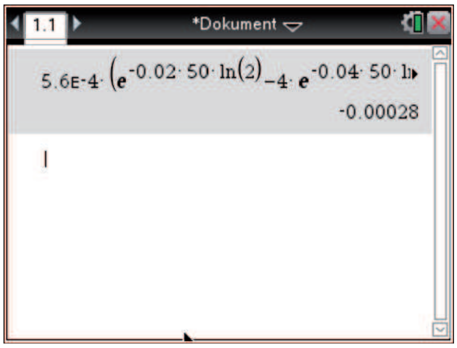


Es ergibt sich die potentielle Wendestelle bei $t = 50 \cdot \ln(2)$.

3. Schritt: Hinreichendes Kriterium prüfen

Berechne $f'''(50 \cdot \ln(2))$:

$$f'''(50 \cdot \ln(2)) = 0{,}00056 \cdot \left(e^{-\frac{1}{50}\cdot 50\cdot\ln(2)} - 4e^{-\frac{1}{25}\cdot 50\cdot\ln(2)}\right)$$
$$= 0{,}00056 \cdot \left(e^{-\ln(2)} - 4e^{-2\ln(2)}\right)$$
$$= 0{,}00028$$



Da $f'''(50\ln(2)) < 0$, liegt an der Stelle $t = 50\ln(2)$ ein lokales Maximum der ersten Ableitung f' vor. Damit kannst du sagen: Nach etwa $50\ln(2) \approx 34{,}66$ Jahren wächst die Buche am stärksten.

Alternativ kannst du die Wendestelle auch über das Vorzeichenwechselkriterium nachweisen. Zeige dazu, dass das Vorzeichen von f'' an der Stelle $t = 50\ln(2)$ von $+$ nach $-$ wechselt:

$$f''(34) = 0{,}028 \cdot \left(-e^{-\frac{1}{50}\cdot 34} + 2e^{-\frac{1}{25}\cdot 34}\right) \approx 0{,}00019$$
$$f''(35) = 0{,}028 \cdot \left(-e^{-\frac{1}{50}\cdot 34} + 2e^{-\frac{1}{25}\cdot 34}\right) \approx -0{,}000095$$

Damit ist das Maximum $t = 50\ln(2)$ von f' mit dem Vorzeichenwechselkriterium nachgewiesen. Damit kannst du sagen: Nach etwa $50\ln(2) \approx 34{,}66$ Jahren wächst die Buche am stärksten.

c) (1) ▶ **Zeitlichen Verlauf im Vergleich beschreiben** (19P)

Betrachte die Unterschiede und die Gemeinsamkeiten der beiden Graphen: Du kannst zum Beispiel die Lage des Hochpunktes und die Steigung der Graphen im Sachzusammenhang vergleichend interpretieren.

Es fällt auf, dass der Graph der Funktion f' durchweg **schneller** ansteigt und auch im Hochpunkt einen größeren Funktionswert annimmt. Die Hochpunkte liegen an der gleichen Stelle $t \approx 35$ vor.

Du kannst also sagen: Die Buche, deren Wachstumsgeschwindigkeit durch f' beschrieben wird, besitzt durchweg eine höhere Wachstumsgeschwindigkeit. Nach etwa 35 Jahren ist die Wachstumsgeschwindigkeit bei beiden Buchen maximal; auch hier wächst die Buche von f schneller.

Je älter die Buchen werden, desto kleiner wird die Wachstumsgeschwindigkeit. Die Buchen wachsen mit zunehmendem Alter also **langsamer**, wobei auch hier die Geschwindigkeit der Buche von f durchweg größer ist.

Da die beiden Buchen zum Zeitpunkt des Keimens gleich hoch sind und die Buche von f schneller wächst, wird sie insgesamt auch eine größere maximale Höhe annehmen.

(2) ▶ **Gleiche Stelle des Maximums nachweisen**

Du musst nicht das Maximum von g' berechnen, sondern kannst die Aufgabe lösen, indem du die beiden Funktionsterme von f' und g' miteinander vergleichst.

$$f'(t) = 1{,}4 \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\right) \quad \text{und} \quad g'(t) = 1{,}1 \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\right)$$

Bis auf den Faktor $1{,}4$ bzw. $1{,}1$ unterscheiden sich die beiden Funktionsterme nicht. Somit entsteht der Graph von f' durch **Streckung** aus dem Graphen von g'.

Bei der Streckung werden nur die y-Koordinaten verändert, die t-Koordinaten der Nullstellen, Hochpunkte, Wendepunkte etc. verändern sich hierdurch nicht. Deshalb haben die Funktionen f' und g' an derselben Stelle ein Maximum.

(3) ▶ **Größere Höhe der ersten Buche nachweisen**

Die Funktionen f' bzw. g' beschreiben die Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen. Die Wachstumsgeschwindigkeit ist die Änderungsrate der **Höhe** der Buchen. Also wird die Höhe der Buchen durch die **Fläche** beschrieben, die vom Graphen von f' bzw. g' und der t-Achse eingeschlossen wird.

Die beiden Buchen sind zum Zeitpunkt des Keimens $t = 0$ gleich hoch. Zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ hat also diejenige Buche eine größere Höhe, für die die Fläche unter dem entsprechenden Graphen **größer** ist.

Du siehst, dass die Fläche unter dem Graphen von f' immer größer ist als die unter dem Graphen von g'. Damit ist die erste Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ größer als die zweite Buche.

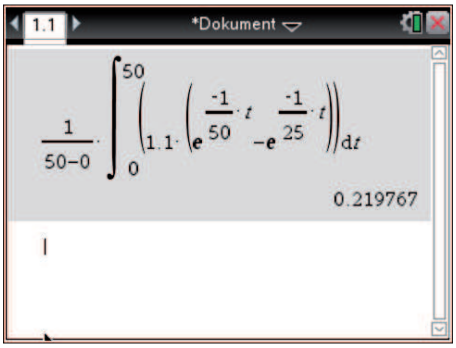
(4) ▶ **Durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit bestimmen**

Die Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche wird durch die Funktion g' beschrieben. Gesucht ist der **Mittelwert** der Funktionswerte von g' im Intervall $[0\,;50]$.

Für den Mittelwert M der Funktionswerte einer Funktion f im Intervall $[a\,;\,b]$ gilt allgemein:

$$M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nun ist die betrachtete Funktion g' und $a = 0$ und $b = 50$. Berechne das Integral mit deinem CAS.

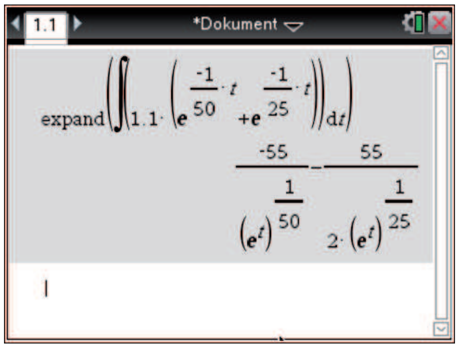


Das CAS liefert den Wert $0,2198$. Damit weißt du: Die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche in den ersten 50 Jahren nach dem Keimen des Samens liegt bei etwa 0,2198 m pro Jahr.

d) (1) **▶ Stammfunktion h von g' bestimmen** (8P)

g' hat die Gleichung $g'(t) = 1,1 \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\right)$. Eine Stammfunktion g kannst du durch **lineare Substitution** bilden oder mit deinem CAS bestimmen. Wir werden hier gleich den `expand`-Befehl an, um ein schönes Ergebnis zu erhalten.

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int g'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 1,1 \cdot \left(\frac{1}{-\frac{1}{50}t} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} - \frac{1}{-\frac{1}{25}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\right) + C \\
&= 1,1 \cdot \left(-50 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} + 25\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\right) + C \qquad \mid \text{ 25 ausklammern} \\
&= 1,1 \cdot 25 \cdot \left(-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\right) + C \\
&= 27,5 \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}\right) + C
\end{aligned}$$



Für $C = 0$ ergibt sich die Gleichung, die auch das CAS ausgibt, nämlich

$$\begin{aligned}
g(t) &= -55 \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\right) \\
&= 27,5 \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}\right)
\end{aligned}$$

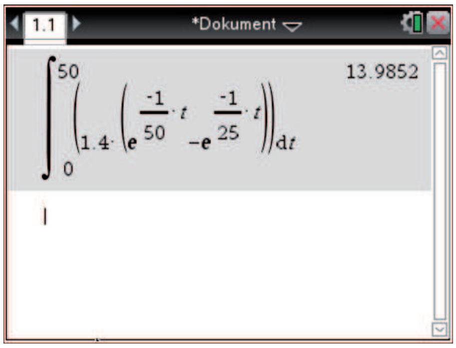
(2) **▶ Wahrheit der Behauptung untersuchen**

Wie oben erklärt, kannst du die Höhe der ersten bzw. der zweiten Buche bestimmen, indem du den Inhalt der Fläche berechnest, die vom Graphen von f' bzw. g' und der t-Achse eingeschlossen wird. Du willst wissen, um wie viel sich die Höhen der beiden Buchen unterscheiden, wenn sie 50 Jahre alt sind. Dich interessiert also die Höhe der beiden Buchen zum Zeitpunkt $t = 50$.

Berechne also jeweils das Integral über f' bzw. über g' zwischen $t = 0$ und $t = 50$. Dies kannst du entweder rechnerisch über den Hauptsatz der Integralrechnung tun oder mit deinem CAS.

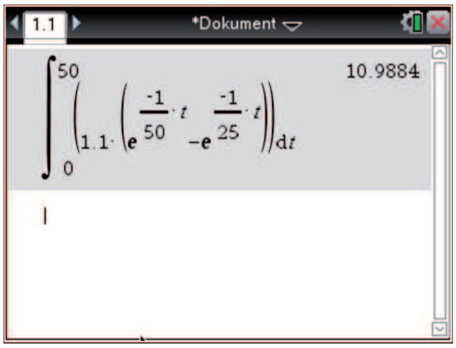
Eine Stammfunktion von g' hast du gerade berechnet; eine Stammfunktion von f' kennst du ebenfalls: f' ist die erste Ableitung von f.

$$\begin{aligned}\int_0^{50} f'(t)\,\mathrm{d}t &= [f(t)]_0^{50}\\ &= f(50) - f(0)\\ &= f_{35}(50) - f_{35}(0)\\ &= 35\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}\cdot 50}\right)^2 - 35\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}\cdot 0}\right)^2\\ &= 35\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)^2 - 35\left(1-\mathrm{e}^{0}\right)^2\\ &= 35\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)^2 - 35\left(1-1\right)^2\\ &= 35\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)^2 - 0 \approx 13{,}99\end{aligned}$$



$$\int_0^{50} g'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}&[g(t)]_0^{50}\\ &= g(50) - g(0)\\ &= 27{,}5\cdot\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}\cdot 50} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}\cdot 50}\right) - \left[27{,}5\cdot\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{25}\cdot 0} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}\cdot 0}\right)\right]\\ &= 27{,}5\cdot\left(\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}\right) - \left[27{,}5\cdot\left(\mathrm{e}^{0} - 2\mathrm{e}^{0}\right)\right]\\ &= 27{,}5\cdot\left(\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}\right) - \left[27{,}5\cdot(1-2)\right]\\ &= 27{,}5\cdot\left(\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}\right) - 27{,}5\cdot(-1)\\ &= 27{,}5\cdot\left(\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}\right) + 27{,}5 \approx 10{,}99\end{aligned}$$



Der Höhenunterschied d der beiden Buchen nach 50 Jahren ist dann:

$d = 13{,}99 - 10{,}99 = 3$

Dieser Abstand ist **kleiner** als 3,5 m. Also ist die Behauptung falsch.

Der Höhenunterschied d der beiden Buchen nach 50 Jahren ist dann:

$d = 13{,}99 - 10{,}99 = 3$

Dieser Abstand ist **kleiner** als 3,5 m. Also ist die Behauptung falsch.