a) (1) ▶ **Angeben von Geradengleichungen für die Flugbahnen der Vögel** (11P)

Geradengleichung für die Flugbahn des Raubvogels:

Eine Geradengleichung besteht im Allgemeinen aus einem Stützvektor und einem Richtungsvektor. Gerade g für die Flugbahn des Raubvogels könnte beispielsweise den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_0}$ als Stützvektor besitzen. Einen Richtungsvektor der Geraden g bildest du mit Hilfe der Koordinaten der Punkte P_0 und P_1.

$$\text{Richtungsvektor: } \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 3248 \\ -1848 \\ 829 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3260 \\ -1860 \\ 830 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3248-3260 \\ -1848+1860 \\ 829-830 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Geradengleichung für die Flugbahn des Raubvogels:

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 3260 \\ -1860 \\ 830 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Geradengleichung für die Flugbahn des Singvogels:

Gerade h für die Flugbahn des Singvogels besitzt den Ortsvektor $\overrightarrow{OQ_0}$ als Stützvektor besitzen. Einen Richtungsvektor der Geraden h bildest du dann mit Hilfe der Koordinaten der Punkte Q_0 und Q_1.

$$\text{Richtungsvektor: } \overrightarrow{Q_0Q_1} = \begin{pmatrix} 796 \\ -592 \\ 201 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 796-800 \\ -592+600 \\ 201-200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geradengleichung für die Flugbahn des Singvogels:

$$h: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OQ_0} + s \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1} = \begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

(2) ▶ **Bestätigen, dass die Vögel mit den gegebenen Geschwindigkeiten fliegen**

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Raubvogel mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 61{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und der Singvogel mit einer Geschwindigkeit von $v_2 = 32{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fliegt. Deine Aufgabe ist es dabei, diese Behauptungen mit denen in der Aufgabenstellung gegebenen Angaben zu bestätigen.

Aus der Aufgabenstellung sollte dir bekannt sein, dass sich der Raubvogel im Punkt $P_0\,(3260 \mid -1860 \mid 830)$ und eine Sekunde später im Punkt $P_1\,(3248 \mid -1848 \mid 829)$ befindet, während sich der Singvogel im Punkt $Q_0\,(800 \mid -600 \mid 200)$ und eine Sekunde später im Punkt $Q_1\,(796 \mid -592 \mid 201)$ befindet, wobei 1 LE einem Meter entspricht.

Willst du nun bestätigen, dass die Vögel mit den gegebenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 fliegen, so berechnest du zuerst, welche Strecke die Vögel innerhalb einer Sekunde zurücklegen. Hast du diese Strecken jeweils bestimmt, so ist dir bekannt, welche Strecke die Vögel innerhalb einer Sekunde zurücklegen. Mit diesen Geschwindigkeitsangaben kannst du dann auf die zurückgelegte Strecke in km pro Stunde schließen.

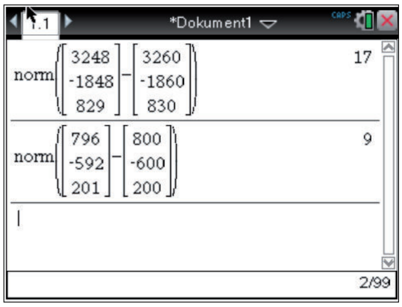
Berechnen der zurückgelegten Strecke innerhalb einer Sekunde der jeweiligen Vögel:

Die zurückgelegte Strecke der Vögel entspricht jeweils dem Abstand zwischen den Punkten P_0 und P_1 bzw. Q_0 und Q_1. Berechne die Längen der Strecken über die Beträge der zugehörigen Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$. Verwende dazu deinen CAS.

Im Calculator-Modus kannst du die Beträge der Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ mit Hilfe des `norm`-Befehls berechnen:

`menu → 7: Matrix und Vektor → 7: norm`

Trage in diesen die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ ein und berechne wie rechts die zugehörigen Beträge.



Vom Raubvogel zurückgelegte Strecke l_R: $l_R = 17\,\text{m}$

Vom Singvogel zurückgelegte Strecke l_S: $l_S = 9\,\text{m}$

Berechnen der Geschwindigkeiten der Vögel, ausgehend von der zurückgelegten Strecke, in km pro h:

Nun ist dir bekannt, dass der Raubvogel innerhalb einer Sekunde insgesamt 17 m zurücklegt, er legt also $v_R = 17\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ zurück. Wandle diese Geschwindigkeitsangabe nun mit Hilfe eines Dreisatzes wie folgt in km pro h um:

$$\cdot 3600 \quad \begin{array}{l} 1\,\text{s} \;\widehat{=}\; 17\,\text{m} \\ 1\,\text{h} \;\widehat{=}\; 61.200\,\text{m} \end{array} \quad \cdot 3600$$

$$v_R = \frac{61.200\,\text{m}}{1\text{h}} = 61{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Der Singvogel legt innerhalb einer Sekunde insgesamt 9 m zurücklegt, er legt also $v_R = 9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ zurück. Wandle diese Geschwindigkeitsangabe nun auch hier in km pro h um:

$$\cdot 3600 \quad \begin{array}{l} 1\,\text{s} \;\widehat{=}\; 9\,\text{m} \\ 1\,\text{h} \;\widehat{=}\; 32.400\,\text{m} \end{array} \quad \cdot 3600$$

$$v_S = \frac{32.400\,\text{m}}{1\text{h}} = 32{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Da die von dir berechneten Geschwindigkeitsangaben mit denen in der Aufgabenstellung übereinstimmen, hast du diese Aufgabe richtig gelöst.

(3) ► **Zeigen, dass die Flugbahnen windschief sind und Bestimmen des Abstands**

Deine Aufgabe ist es hier zu zeigen, dass die im ersten Aufgabenteil dieser Aufgabe bestimmten Fluggeraden windschief zueinander verlaufen. Dazu weist du hier im ersten Schritt nach, dass die Richtungsvektoren der Fluggeraden linear unabhängig sind. Hast du dies nachgewiesen, so berechnest du im zweiten Schritt den Abstand der Geraden.

1. Schritt: Lineare Unabhängigkeit der Richtungsvektoren der Fluggeraden nachweisen
Beim Nachweisen der linearen Unabhängigkeit der Richtungsvektoren der Fluggeraden gibt es hier zwei Möglichkeiten, welche im Folgenden dargestellt werden:

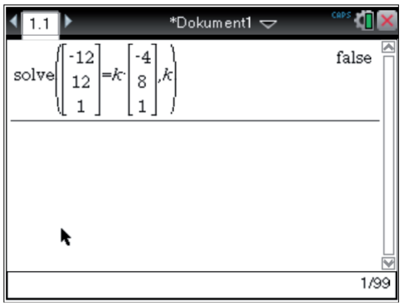
Möglichkeit A:

Sind die zwei Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ der Fluggeraden linear unabhängig, so ist folgende Gleichung für kein $k \in \mathbb{R}$ erfüllt:
$\overrightarrow{P_0P_1} = k \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1}$.

Setze also die Richtungsvektoren in die obige Gleichung ein und zeige so, dass die Richtungsvektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix}-12\\12\\-1\end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\1\end{pmatrix}.$$

Verwende dazu den `solve`-Befehl im Calculator-Modus deines CAS. Dieser Befehl löst die eingetragene Gleichung nach jener Variablen, welche getrennt durch ein Komma, hinter die Gleichung in die Klammer eingetragen wird. Liefert dieser Befehl als Ergebnis `false`, so ist die eingetragene Gleichung nicht lösbar.
Wende den `solve`-Befehl also wie rechts auf die obige Gleichung an, um zu zeigen, dass die Richtungsvektoren nicht parallel zueinander verlaufen.



Da der CAS `false` beim Lösen der Gleichung liefert, hast du gezeigt, dass $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ linear unabhängig sind.

Möglichkeit B:

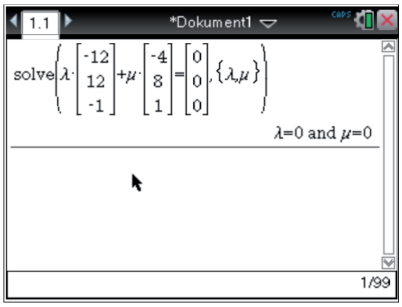
Sind die Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ der Fluggeraden linear unabhängig so ist

$$\lambda\cdot\overrightarrow{P_0P_1}+\mu\cdot\overrightarrow{Q_0Q_1}=\overrightarrow{0}$$

nur trivial, das heißt mit $\lambda=\mu=0$, lösbar. Setze also die Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ der Fluggeraden in das obige Gleichungssystem ein und löse das Gleichungssystem nach μ und λ:

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}-12\\12\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Verwende dazu den `solve`-Befehl im Calculator-Modus deines CAS (siehe oben). Liefert dieser hier $\lambda=\mu=0$ beim Lösen der Gleichung, so hast du gezeigt, dass die Richtungsvektoren nicht parallel und dass die Richtungsvektoren der Fluggeraden linear unabhängig sind.
Wende den Befehl wie im Schaubild rechts an.



$\Longrightarrow$ Es gilt also $\lambda=\mu=0$. Das bedeutet, dass die Richtungsvektoren der Fluggeraden linear unabhängig sind.

2. Schritt: Bestimmen des Abstands zwischen beiden Geraden

Schaust du in dein Tafelwerk bzw. deine Formelsammlung, so findest du folgende Formel zur Berechnung des Abstands zwischen windschiefen Geraden:
$d=|(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\circ\overrightarrow{n_0}|$

Wobei die $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ den Stützvektoren der Fluggeraden g und h entsprechen, es könnte also

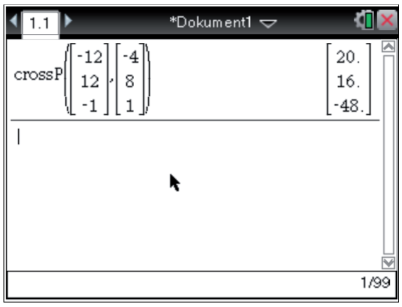
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OQ_0} = \begin{pmatrix} 3260 \\ -1860 \\ 830 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix}$$

gelten. $\overrightarrow{n_0}$ ist hier der Normaleneinheitsvektor. Dieser Vektor besitzt eine Länge von 1 LE und steht sowohl auf dem Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ der Fluggeraden g als auch auf dem Richtungsvektor $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ der Fluggeraden h senkrecht. Bevor du also den Abstand d zwischen den Fluggeraden berechnen kannst, bestimmst du den Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0}$.

Den nicht auf 1 normierte Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Fluggeraden g und h kannst du mit deinem CAS bestimmen.

Verwende dazu im Calculator-Modus den `crossp`-Befehl. Dieser Befehl berechnet das Vektorprodukt jener Vektoren, welche getrennt durch ein Komma in die Klammer eingetragen werden. Wende den `crossp`-Befehl hier also wie folgt an, um $\overrightarrow{n}$ zu berechnen:

`crossp(`$\overrightarrow{P_0P_1}$`,`$\overrightarrow{Q_0Q_1}$`).`



Der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ ergibt sich mit dem CAS also zu:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ -48 \end{pmatrix}.$$

Da beim Normalenvektor nur die Richtung und nicht die Länge zählt, ist folgende Umformung von diesem zulässig:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ -48 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

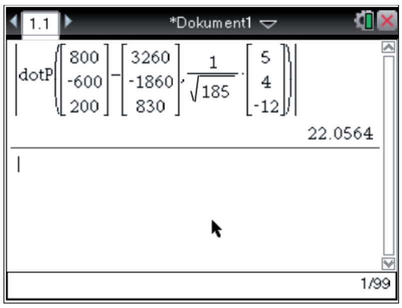
Normiere den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ nun auf eine Länge von 1 indem du diesen durch dessen Betrag teilst:

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{n}|} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 4^2 + (-12)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{185}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Setze nun $\overrightarrow{n_0}$, $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ in die oben aufgestellte Formel für den Abstand d zwischen zwei windschiefen Geraden ein und berechne diesen mit deinem CAS.

Das in der Rechnung auftretende Skalarprodukt kannst du mit dem `dotP`-Befehl berechnen. Dieser Befehl berechnet das Skalarprodukt jener Vektoren, die getrennt durch ein Komma, in die Befehlsklammer eingetragen werden. Berechne den unten stehenden Ausdruck also wie im Schaubild rechts.

$$d = \left| \left(\overrightarrow{OQ_0} - \overrightarrow{OP_0} \right) \circ \overrightarrow{n_0} \right|$$



$\Longrightarrow$Der Abstand zwischen den Fluggeraden ist also ungefähr $22{,}06\,\text{m}$

b) (1) ► **Berechnen in welchem Punkt der Singvogel den Nebel verlässt** (7P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass Ebene E, welche an der oberen Grenze des Frühnebels verläuft, orthogonal zu $\overrightarrow{n_E}$ ist und durch den Punkt $A(0 \mid 0 \mid 280)$ verläuft. Deine Aufgabe ist es hier, jenen Punkt zu berechnen, an welchem der Singvogel den Frühnebel verlässt. Dieser Punkt entspricht dem Schnittpunkt S von Ebene E und Fluggerade h (siehe a).

Bevor du jedoch den Schnittpunkt S von Ebene E und Fluggeraden h bestimmen kannst, ermittelst du mit den Angaben aus der Aufgabenstellung die Ebenengleichung der Ebenen E in Koordinatenform. Hast du eine Ebenengleichung von E in Koordinatenform bestimmt, so fasst du h als Vektor in Abhängigkeit von s zusammen und setzt diesen in die Koordinatenform von E ein. Hast du anschließend den Parameterwert für s mit deinem CAS berechnet, unter welchem sich E und h schneiden, so setzt du diesen in die Geradengleichung von h ein und berechnest somit die Koordinaten des Schnittpunkts S.

1. Schritt: Ebenengleichung von E in Koordinatenform

Die Normalform einer Ebenengleichung in Koordinatenform ist:

$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d.$

Wobei n_1, n_2 und n_3 den Einträgen des Normalenvektors von E entsprechen und d eine über eine Punktprobe zu bestimmende Konstante ist. Die Ebenengleichung von E in Koordinatenform ergibt sich also zu:

$x_1 - x_2 + 10 \cdot x_3 = d$ mit $A(0 \mid 0 \mid 280)$:
$0 - 0 + 10 \cdot 280 = d \;\Leftrightarrow\; d = 2800$

$\Longrightarrow E : x_1 - x_2 + 10 \cdot x_3 = 2800.$

2. Schritt: Berechnen des Schnittpunkts von E und h

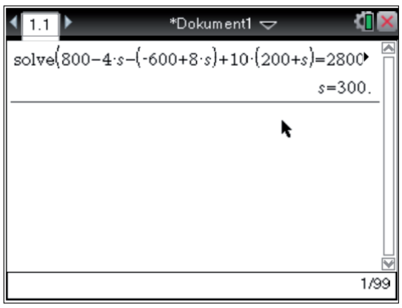
Gerade h umgeformt als von s abhängiger Vektor:

$$h : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 - 4 \cdot s \\ -600 + 8 \cdot s \\ 200 + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung von E in Koordinatenform ergibt:

$800 - 4 \cdot s - (-600 + 8 \cdot s) + 10 \cdot (200 + s) = 2800$

Löse diese Gleichung wie im Aufgabenteil a über den `solve`-Befehl im Calculator-Modus deines CAS. Wende den `solve`-Befehl dazu wie im Schaubild rechts an.



Einsetzen von $s = 300$ in die Geradengleichung von h zum Berechnen der Koordinaten des Schnittpunkts S von E und h:

$$h : \overrightarrow{x_S} = \begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix} + 300 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400 \\ 1800 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$Der Singvogel verlässt im Punkt $S\,(-400 \mid 1800 \mid 500)$ den Frühnebel.

(2) ► **Berechnen nach welcher Zeit der Singvogel den Frühnebel verlässt**

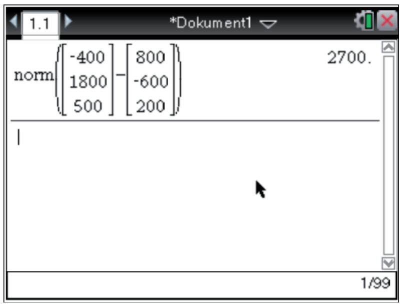
Aus der Aufgabenstellung zum Aufgabenteil a geht hervor, dass der Singvogel mit einer Geschwindigkeit von $v_S = 32{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fliegt. Deine Aufgabe ist es hier, die Zeit t zu berechnen, welche der Singvogel benötigt, um den Frühnebel zu verlassen. Das heißt, du berechnest die Zeit, welche der Singvogel benötigt um, von Punkt $Q_0(800 \mid -600 \mid 200)$ zum Punkt $S\,(-400 \mid 1800 \mid 500)$ zu gelangen.

Ermittle dazu zuerst welche Strecke der Singvogel zurücklegen muss um von Q_0 zu S zu gelangen. Hast du die Länge dieser Strecke bestimmt, so ermittelst du mit Hilfe der Fluggeschwindigkeit v_S des Singvogels die Zeit, welche der Singvogel benötigt, um diese zurückzulegen.

1. Schritt: Länge der Strecke $\overline{Q_0S}$

Die Länge der Strecke $\overline{Q_0S}$ berechnest du hier über den Betrag des zugehörigen Vektors $\overrightarrow{Q_0S}$. Verwende dazu wie im Aufgabenteil a den `norm`-Befehl im Calculator-Modus deines CAS. Wende den Befehl wie rechts an, um die Länge der Strecke $\overline{Q_0S}$ zu berechnen.

Es gilt also: $|\overline{Q_0S}| = 2.700\,\text{m}$.



2. Schritt: Vom Singvogel benötigte Zeit t

Aus der Physik sollte die folgender Zusammenhang zwischen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit bekannt sein:

$v = \frac{s}{t} \;\Leftrightarrow\; t = \frac{s}{v}.$

Setze nun v_S und $s = |\overline{Q_0S}| = 2700\,\text{m} = 2{,}7\,\text{km}$ in den oben aufgestellten Ansatz ein, um die Zeit t zu berechnen welche der Singvogel benötigt, um den Frühnebel zu verlassen:

$$t = \frac{2{,}7\,\text{km}}{32{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}083\,\text{h} = 5\,\text{min}$$

Alternativ

Aus der Aufgabenstellung sollte dir bekannt sein, dass der Singvogel in einer Sekunde den Richtungsvektor der Geraden h zurücklegt. Außerdem ist dir aus dem vorherigen Aufgabenteil dieser Aufgabe bekannt, dass der Singvogel für $s = 300$ die Grenze des Frühnebels erreicht. Das heißt der Singvogel erreicht nach 300 s also 5 min die Grenze des Frühnebels.

$\Longrightarrow$Der Singvogel benötigt 5 Minuten, um den Frühnebel zu verlassen.

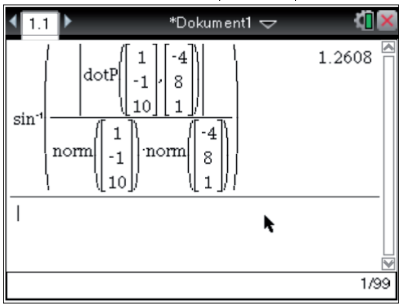
(3) **▶ Ermitteln, unter welchem Winkel α der Singvogel den Frühnebel verlässt**

Deine Aufgabe ist es hier, jenen Winkel α zu berechnen, unter welchem der Singvogel den Frühnebel verlässt. Das heißt, du berechnest den Winkel α, unter welchem sich Gerade h und Ebene E schneiden. Da von Ebene E der Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ bekannt ist, berechnest du den Winkel α, unter welchem sich E und h schneiden, über das Komplement (der Ergänzung zu $90\,°$) des Winkels, welcher durch den Normalenvektor von E und dem Richtungsvektor von h eingeschlossen ist. Es gilt also:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{Q_0Q_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n_E}\right| \cdot \left|\overrightarrow{Q_0Q_1}\right|}$$

Berechnen von α:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{Q_0Q_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n_E}\right| \cdot \left|\overrightarrow{Q_0Q_1}\right|} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \;=\; \sin^{-1}\left(\frac{\left|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{Q_0Q_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n_E}\right| \cdot \left|\overrightarrow{Q_0Q_1}\right|}\right)$$



$\Longrightarrow$Der Singvogel verlässt den Frühnebel unter einem Winkel von $1{,}26\,°$.

c) **▶ Bestimmen des Punktes, indem der Raubvogel erstmals geortet werden kann** (4P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass sich im Punkt V mit $V(-340 \mid 1740 \mid 200)$ eine Vogelwarte befindet, die für Vögel über ein Ortungssystem mit einer Reichweite von $1750\,\text{m}$ verfügt.

Deine Aufgabe ist es nun, den Punkt Q auf der Flugbahn $\overrightarrow{P_0P_1}$ des Raubvogels zu bestimmen, in dem der Raubvogel genau einen Abstand von $1750\,\text{m}$ zur Vogelwarte besitzt und damit erstmalig geortet werden kann.

Allgemein wird der Abstand zwischen zwei Punkten über den Betrag des zugehörigen Vektors berechnet. Hier soll nun jedoch ein Punkt Q auf der Flugbahn, deren Richtung durch den Vektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ beschrieben wird, so bestimmt werden, dass dieser zum Punkt V einen Abstand von $1750\,\text{m}$ besitzt. Willst du einen solchen Punkt bestimmen, so definierst du zunächst eine Gerade r, welche die Flugbahn des Raubvogels beschreibt.

Gerade r beschreibt also jeden Punkt auf der Flugbahn des Raubvogels. Fasse Gerade r als einen von einem bestimmten Parameter abhängigen Punkt P_r auf und berechne die Länge des Vektors $\overrightarrow{P_rV}$ in Abhängigkeit des Parameters von Gerade r. Hast du diesen Vektor bestimmt $\overrightarrow{P_rV}$, so lässt sich mit diesem und der Abstandsangabe $1750\,\text{m}$ der Parameter von r so bestimmen, dass Punkt Q berechenbar ist.

Bestimmen der Koordinaten von Punkt Q

1. Schritt: Bestimmen der Geraden r

Gerade r, welche die Flugbahn des Raubvogels beschreiben soll, kann als Stützvektor den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_0}$ und als Richtungsvektor den Vektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ besitzen:

$$r:\ \vec{x} = \overrightarrow{OP_0} + s\cdot\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix}3260\\-1860\\830\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3248-3260\\-1848-(-1860)\\829-830\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3260\\-1860\\830\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-12\\12\\-1\end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Berechnen des zu Q zugehörigen Parameterwerts

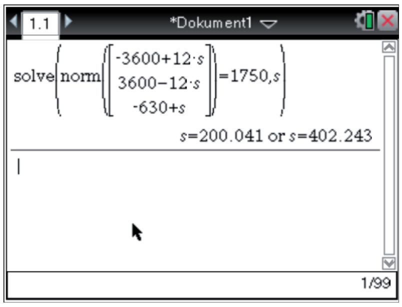
Bildest du nun den von s abhängigen Vektor $\overrightarrow{P_rV}$, so sollte dieser wie unten aussehen. Forme aber zunächst Gerade r so um, dass diese den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_r}$ des Punktes P_r in Abhängigkeit von s repräsentiert:

$$r:\ \vec{x_r} = \begin{pmatrix}3260\\-1860\\830\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-12\\12\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3260-12s\\-1860+12\cdot s\\830-s\end{pmatrix}.$$

Jeder Punkt P_r auf der Geraden r hat nun allgemein die Koordinaten $P_r(3260-12s \mid -1860+12\cdot s \mid 830-s)$. Gesucht ist der Punkt P_r so, dass er vom Punkt V den Abstand 1.750 hat. Berechne also zunächst den Vektor $\overrightarrow{PrV}$ und dessen Länge:

$$\left|\overrightarrow{P_rV}\right| = \left|\begin{pmatrix}-340\\1740\\200\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3260-12s\\-1860+12\cdot s\\830-s\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3600+12\cdot s\\3600-12\cdot s\\-630+s\end{pmatrix}\right|.$$

Setze nun den oben bestimmten Term für die Länge des Vektors $\overrightarrow{P_rV}$ mit 1750 gleich, um Parameter s so zu bestimmen, dass mit diesem die Koordinaten von Punkt Q berechnet werden können. Verwende zum Lösen der resultierenden Gleichung wieder den `solve`-Befehl deines CAS und berechne den auftretenden Betrag mit dem `norm`-Befehl (siehe oben). Bestimme also den gesuchten Parameterwert für s wie im Schaubild rechts.



Der CAS liefert als Lösungen der Gleichung: $s_1 = 200,04$ und $s_2 = 402,24$. Da hier jener Punkt Q gesucht ist, in welchem der Raubvogel **„erstmalig“** geortet werden kann, ist der gesuchte Parameterwert für s: $s_1 = 200,04$.

3. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von Q

Die Koordinaten des gesuchten Punktes Q bestimmst du nun, indem du $s_1 = 200,04$ in die Geradengleichung von r einsetzt:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}3260\\-1860\\830\end{pmatrix} + 200,04\cdot\begin{pmatrix}-12\\12\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}859,52\\540,48\\629,96\end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ Die Koordinaten des Punktes, in welchem der Raubvogel erstmalig geortet werden kann, sind also $Q\,(859,52 \mid 540,48 \mid 629,96)$.

d) (1) ▶ **Berechnen des Abstands zwischen Sing- und Raubvogel** (4P)

Aus dem vorhergegangenen Aufgabenteil ist dir bekannt, dass der Singvogel im Punkt $S(-400 \mid 1800 \mid 500)$ aus dem Nebel sticht. Dabei hat dieser 5 Minuten benötigt, um von seiner ursprünglichen Position Q_0 zur Nebelgrenze zu gelangen. Deine Aufgabe ist es nun, den Abstand der Vögel zueinander zu berechnen und zwar an jenem Zeitpunkt, an welchem der Singvogel den Nebel verlässt.

Dazu berechnest du zuerst die Position des Raubvogels nach $t = 5\,\text{min} = 300\,\text{s}$. Hast du diese bestimmt, so berechnest du über den Betrag des Vektors der Positionen der Vögel den Abstand zwischen diesen.

1. Schritt: Position des Raubvogels nach $t = 300\,\text{s}$

Setze $t = 300$ in die Geradengleichung der Fluggeraden g des Raubvogels ein, um dessen aktuelle Position P_{300} zu berechnen:

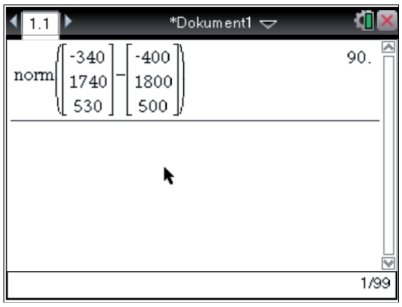
$$\overrightarrow{x_{P_{300}}} = \begin{pmatrix} 3260 \\ -1860 \\ 830 \end{pmatrix} + 300 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -340 \\ 1740 \\ 530 \end{pmatrix}$$

Zu dem Zeitpunkt, an welchem der Singvogel den Nebel verlässt, befindet sich der Raubvogel im Punkt $P_{300}\,(-340 \mid 1740 \mid 530)$.

2. Schritt: Berechnen des Abstands der Vögel

Willst du den Abstand d_N der Vögel nun berechnen, so berechnest du den Betrag des Vektors $\overrightarrow{SP_{300}}$. Wende dazu den `norm`-Befehl im Calculator-Modus deines CAS wie oben an.

$d_N = 90\,\text{m}$



$\Longrightarrow$ Zum Zeitpunkt, an dem der Singvogel aus dem Frühnebel austritt, beträgt der Abstand zwischen den Vögel 90 m.

(2) ▶ **Winkel zwischen ursprünglicher und neuer Flugbahn des Raubvogels**

Der Winkel zwischen Vektoren berechnet sich hier über folgende Formel:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}.$$

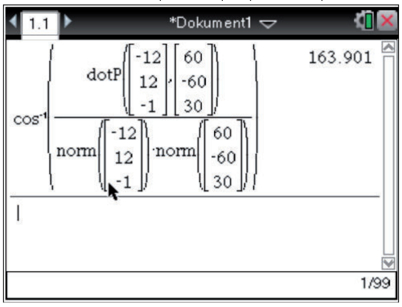
Dabei sind $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ die für die Rechnung relevanten Vektoren. Deine Aufgabe ist es hier, den Winkel zwischen der ursprünglichen und der neuen Flugbahn des Raubvogels zu berechnen. Die ursprüngliche Flugbahn des Raubvogels wurde durch den Vektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ modelliert.

Nachdem der Raubvogel den Singvogel erspäht hat, fliegt dieser in Richtung des Singvogels, also in Richtung des Punktes S. Die neue Flugrichtung wird also durch folgenden Vektor modelliert:

$$\overrightarrow{SP_{300}} = \begin{pmatrix} 60 \\ -60 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Setze nun die Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{SP_{300}}$ für $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ in die oben genannte Formel zur Berechnung des Winkels zwischen den Flugbahnen ein:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \circ \overrightarrow{SP_{300}}}{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SP_{300}}\right|} \Leftrightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{P_0P_1} \circ \overrightarrow{SP_{300}}}{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SP_{300}}\right|}\right)$$



$\Longrightarrow$Der Winkel zwischen ursprünglicher und neuer Flugbahn des Raubvogels ist ungefähr 163,9 °.

e) ▶ **Berechnen der mindestens erforderlichen Sichtweite im Frühnebel** (4P)

Zum Zeitpunkt, an welchem der Raubvogel den Singvogel erspäht, befindet sich der Raubvogel im Punkt $P_{300}(-340 \mid 1740 \mid 530)$ und der Singvogel im Punkt $S(-400 \mid 1800 \mid 500)$. Wie du der Aufgabenstellung entnehmen kannst, fliegt der Singvogel, nachdem der Raubvogel ihn erspäht hat, in die gleiche Richtung wie dieser, das heißt, der Singvogel fliegt in Richtung dieses Vektors (siehe c):

$$\overrightarrow{P_{300}S} = \begin{pmatrix} -60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

Darüber hinaus kannst du der Aufgabenstellung entnehmen, dass beide Vögel, nachdem sie sich gesehen haben, mit dem dreifachen ihrer ursprünglichen Geschwindigkeit fliegen. Das heißt, der Raubvogel ist mit einer Geschwindigkeit von $v_R = 3 \cdot 61{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 51\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und der Singvogel mit einer Geschwindigkeit von $v_S = 3 \cdot 32{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ unterwegs.

Willst du nun berechnen, wie groß die mindestens erforderliche Sichtweite im Frühnebel sein muss, damit der Raubvogel den Singvogel nicht aus den Augen verliert, so berechnest du im ersten Schritt, welchen Abstand der Raubvogel zum Frühnebel besitzt. Hast du diesen Abstand ermittelt, so ermittelst du die Zeit, welche der Raubvogel benötigt, um den Frühnebel zu erreichen. Anschließend berechnest du, wie weit der Singvogel in dieser Zeitspanne in den Frühnebel eintauchen konnte. Die resultierende Distanz gibt dir dann die Mindestsichtweite im Frühnebel an, welche der Raubvogel besitzen muss um den Singvogel nicht aus den Augen zu verlieren.

1. Schritt: Distanz des Raubvogels zur Grenze des Frühnebels

Der Raubvogel fliegt in Richtung des Vektors $\overrightarrow{P_{300}S}$, was bedeutet, dass dieser im Punkt S in den Frühnebel eintaucht. Berechne also die Länge des Vektors $\overrightarrow{P_{300}S}$ mit deinem CAS (siehe oben) um die Distanz zu ermitteln, welche der Raubvogel zurücklegen muss, um an die Grenze des Frühnebels zu gelangen (siehe c):

$|\overrightarrow{P_{300}S}| = 90\,\text{m}.$

2. Schritt: Zeit, welche der Raubvogel benötigt um die Grenze des Frühnebels zu erreichen

Der Raubvogel ist mit einer Geschwindigkeit von $v_R = 51\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ unterwegs. Berechne nun wie folgt die Zeit, welche der Raubvogel benötigt, um den Frühnebel zu erreichen (siehe b):

$$t_R = \frac{|\overrightarrow{P_{300}S}|}{v_R} = \frac{90\,\text{m}}{51\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,765\,\text{s}.$$

3. Schritt: Berechnen, wie weit der Singvogel in dieser Zeit in den Frühnebel eintaucht

Der Singvogel ist mit einer Geschwindigkeit von $v_R = 27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ unterwegs, das heißt er kann diese Distanz, nach dem der Raubvogel ihn erspäht hat, im Frühnebel zurücklegen:

$$s_S = v_S \cdot t_R = 27\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,765\,\text{s} = 47,66\,\text{m}.$$

$\Longrightarrow$ Die Mindestsichtweite im Frühnebel muss also ungefähr 47,66 m sein, damit der Raubvogel den Singvogel nicht aus den Augen verliert.