1.1 ► Prüfung der Aussagen (8P)

In der Abbildung ist das Schaubild von h zu sehen. Ihre Stammfunktion ist H und h' und h'' sind ihre Ableitungsfunktionen. Du kannst erkennen, dass das Schaubild im Definitionsbereich

- zwei Extrema aufweist: einen Hochpunkt bei $(0\,|\,4)$ und einen Tiefpunkt bei $(3\,|\,0)$,
- einen Wendepunkt etwa bei $x = 1,5$ besitzt und
- im Intervall $[-7;3]$ rechtsgekrümmt und im Intervall $[3;4]$ linksgekrümmt ist.

Mithilfe dieser Angaben kannst du nun Aussagen über die Stamm- und Ableitungsfunktionen treffen.

Aussage (I) betrifft die Stammfunktion H von h. H soll zwei Wendestellen besitzen. An Wendestellen treten Extrema der Steigung ein. Die Steigung von H ist gerade durch h definiert. Dort also, wo das Schaubild von h Extrempunkte aufweist, befinden sich Wendepunkte von H.

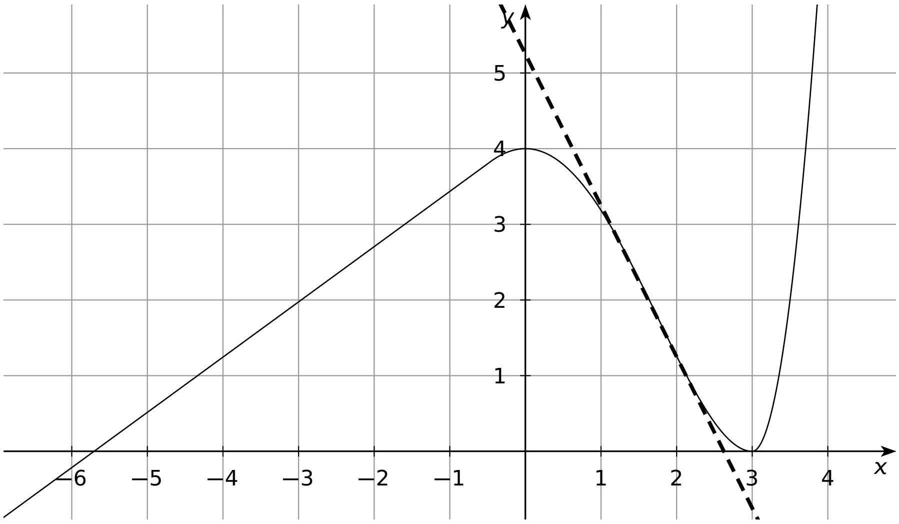
h besitzt zwei Extrempunkte bei $x = 0$ und $x = 3$. Diese implizieren, dass H dort Wendestellen aufweist. Die Aussage ist richtig.

Aussage (II) besagt, dass die zweite Ableitung h'' von h an der Stelle $x = 0,5$ einen höheren Wert aufweist als an der Stelle $x = 3,5$. Die zweite Ableitung von h definiert dabei die Änderungsrate der Steigung von h.

Bei $x = 0,5$ ist diese Änderungsrate negativ, weil die Steigung an dieser Stelle einen immer negativeren Wert annimmt. Bei $x = 3,5$ dagegen wird die Steigung immer positiver.

$h''(0,5)$ ist negativ, da das Schaubild von h an dieser Stelle rechtsgekrümmt ist, $h''(3,5)$ ist positiv, da das Schaubild von h an dieser Stelle linksgekrümmt ist. Die Aussage ist also falsch.

Aussage (III) betrifft die Steigung von h, die durch die erste Ableitung h' definiert ist. Die Steigung von h soll also immer größer sein als -3. Um zu ermitteln, ob h jemals eine kleinere Steigung aufweist, legen wir eine Tangente an das Schaubild von h in seinem Wendepunkt, dort nimmt die Steigung nämlich ihren negativsten Wert an:



Über ein Steigungsdreieck kannst du ungefähr die Steigung m abschätzen. Für m ergibt sich in etwa:

$$m \approx \frac{5-0}{0-2,5} = -2.$$

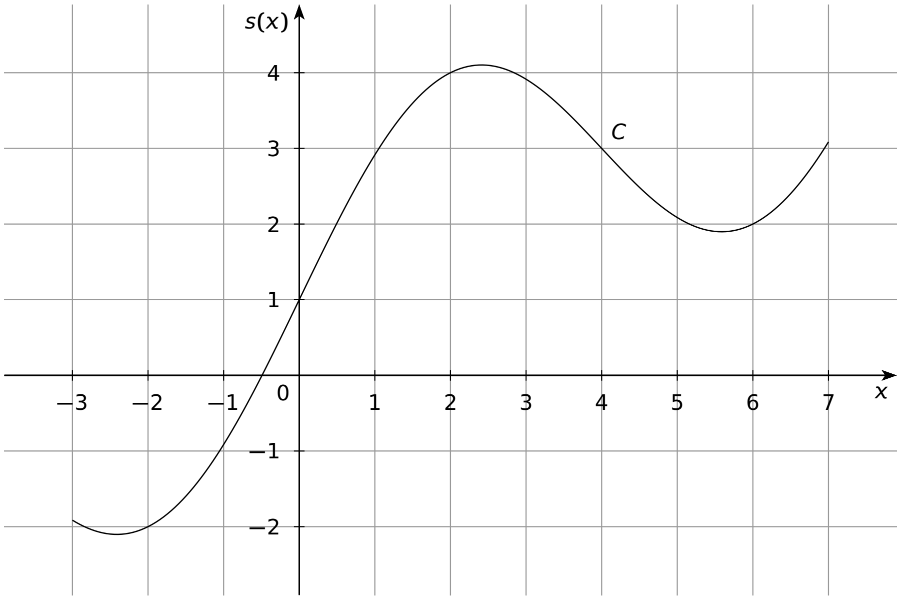
Die negativste Steigung im Schaubild von h befindet sich im Wendepunkt und nimmt dort etwa den Wert -2 an. Die Wertemenge von h' nimmt also keine Werte kleiner -2 an. Die Aussage stimmt.

Aussage (IV) betrifft die Ableitung h' von h. Das Schaubild dieser soll überall rechtgekrümmt sein. Die Steigung von h' muss also im gesamten Intervall kleiner werden. h' sinkt von $x = -7$ bis $x = 0$ auf Null und von $x = 0$ bis zur Wendestelle auf ein Minimum. Danach steigt h' jedoch wieder. Das Schaubild von h' weist also im Wendepunkt einen Tiefpunkt auf.

Da h' aber einen Tiefpunkt aufweist, kann h' nicht überall rechtsgekrümmt sein, da das Schaubild einer Funktion in einem Tiefpunkt immer linksgekrümmt ist. Die Aussage ist daher falsch.

1.2.1► **Schaubild von *s*** (6P)

Das Schaubild von s ist C. Sein Schaubild im Intervall $[-3;7]$ sieht folgenderma-ßen aus:



► **Werte der Steigungsfunktion**

Die Steigung von C lässt sich mithilfe der ersten Ableitung von s bestimmen. Diese lautet:

$$s(x) = \frac{1}{2}x + 1 + 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \qquad \sin'(x) = \cos(x) \rightarrow \text{Leite mit der Kettenregel ab:}$$

$$s'(x) = \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$\boldsymbol{s'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$$

Du kannst erkennen, dass die Funktion eine periodische Cosinus-Funktion darstellt. Der Cosinus kann nur Werte zwischen 1 und -1 annehmen, dies bedeutet, dass der minimale Wert, den die Steigung von C haben kann, dann eintritt, wenn

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = -1$

gilt und der maximale Wert eintritt, wenn

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 1$

gilt.

Setze die beiden Bedingungen in die Funktionsgleichung von s' ein und ermittle die Werte, die die Steigung annehmen kann.

Setze (1) in $s'(x)$ ein und berechne s'_{max}:

$$s'_{max} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{1+\pi}{2} \approx 2,0708$$

Setze (1) in $s'(x)$ ein und berechne s'_{min}:

$$s'_{min} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot (-1) = \frac{1-\pi}{2} \approx -1,0708$$

Die Steigung nimmt nun alle Werte an, die zwischen der minimalen und der maximalen Steigung liegen.

Die Steigung von s kann daher Werte im Intervall $[-1,0708; 2,0708]$ annehmen.

1.2.2 ▶ **Nachweis, dass die Gerade g das Schaubild C bei $x = -2$ und $x = 6$ berührt** (12P)

In einem Berührpunkt zweier Schaubilder stimmen sowohl die Funktionswerte der zugehörigen Funktionen als auch ihre Steigungen überein.

Für die übereinstimmenden Funktionswerte folgen für die Berührstellen bei $x = -2$ und $x = 6$ die Gleichungen:

(1a) $\quad s(-2) = g(-2)$

(1b) $\quad s(6) = g(6)$

Die Steigungen der Schaubilder sind durch ihre Ableitungsfunktionen definiert. Die Werte dieser Funktionen sollen an den besagten Stellen ebenso übereinstimmen. Daraus folgen die weiteren Bedingungen:

(2a) $\quad s'(-2) = g'(-2)$

(2b) $\quad s'(6) = g'(6)$

Zeige nun durch Einsetzen der Funktionsterme und Vereinfachen, dass diese Bedingungen erfüllt sind.

Setze die Funktionsterme von s und g in (1a) und (1b) ein und vereinfache. Treten wahre Aussagen ein, so sind die Bedingungen erfüllt:

(1a)

$$\begin{aligned} s(-2) &= g(-2) \\ \frac{1}{2} \cdot (-2) + 1 + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot (-2)\right) &= 0,5 \cdot (-2) - 1 \\ -1 + 1 + 2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -1 - 1 \\ -2 &= -2 \qquad \text{Wahre Aussage!} \end{aligned}$$

(1b)

$$\begin{aligned} s(6) &= g(6) \\ \frac{1}{2} \cdot 6 + 1 + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 6\right) &= 0,5 \cdot 6 - 1 \\ 3 + 1 + 2 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 3 - 1 \\ 2 &= 2 \qquad \text{Wahre Aussage!} \end{aligned}$$

Die erste Bedingung ist erfüllt - die Funktionwerte von s und g stimmen bei $x = -2$ und $x = 6$ überein.

Um die zweite Bedingung zu prüfen werden die Ableitungsfunktionen benötigt. Die Ableitungsfunktion von s ist bekannt und hat die Gleichung

$s'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$

Da g eine Gerade ist, ist die Steigung der Funktion immer gleich dem Koeffizienten bei x. Für die Ableitungsfunktion g' folgt daher:

$g'(x) = 0,5.$

Setze die beiden Funktionsterme in die zweite Bedingung ein und vereinfache.

$$
\begin{array}{lrcll}
(2a) & s'(-2) & = & g'(-2) & \\
& \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot (-2)\right) & = & 0,5 & \mid -0,5 \\
& \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & = & 0 & \\
& \frac{\pi}{2} \cdot 0 & = & 0 & \\
& 0 & = & 0 & \text{Wahre Aussage!}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcll}
(2b) & s'(6) & = & g'(6) & \\
& \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 6\right) & = & 0,5 & \mid -0,5 \\
& \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) & = & 0 & \\
& \frac{\pi}{2} \cdot 0 & = & 0 & \\
& 0 & = & 0 & \text{Wahre Aussage!}
\end{array}
$$

Auch die zweite Bedingung ist erfüllt. An den gemeinsamen Punkten von h und s bei $x = -2$ und $x = 6$ stimmen die Steigungen der Schaubilder überein.
Damit ist nachgewiesen, dass g das Schaubild C bei $x = -2$ und $x = 6$ berührt.

▶ Nachweis, dass C nie unterhalb von g verläuft

Es soll gezeigt werden, dass das Schaubild von s nie unter der Geraden g verläuft. Dies würde eintreten, wenn der Funktionswert von s an einer Stelle x kleiner wäre als der Funktionswert von g an dieser Stelle.

Die Ungleichung

$s(x) < g(x)$

darf demnach keine Lösung haben.

Setze die Funktionsterme ein und löse nach x auf.

$$\begin{aligned} s(x) &< g(x) \\ \frac{1}{2}x+1+2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) &< 0,5x-1 && \mid -0,5x \\ 1+2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) &< -1 && \mid -1 \\ 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) &< -2 && \mid \cdot\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) &< -1 \end{aligned}$$

Wir wissen, dass der Sinus als periodische Funktion nur Werte zwischen 1 und -1 annehmen kann. Die Bedingung, dass der der Sinus wie in diesem Fall kleiner als -1 wird, kann daher nicht erfüllt werden.

Hiermit ist gezeigt, dass C nicht unter der Geraden g verlaufen kann.

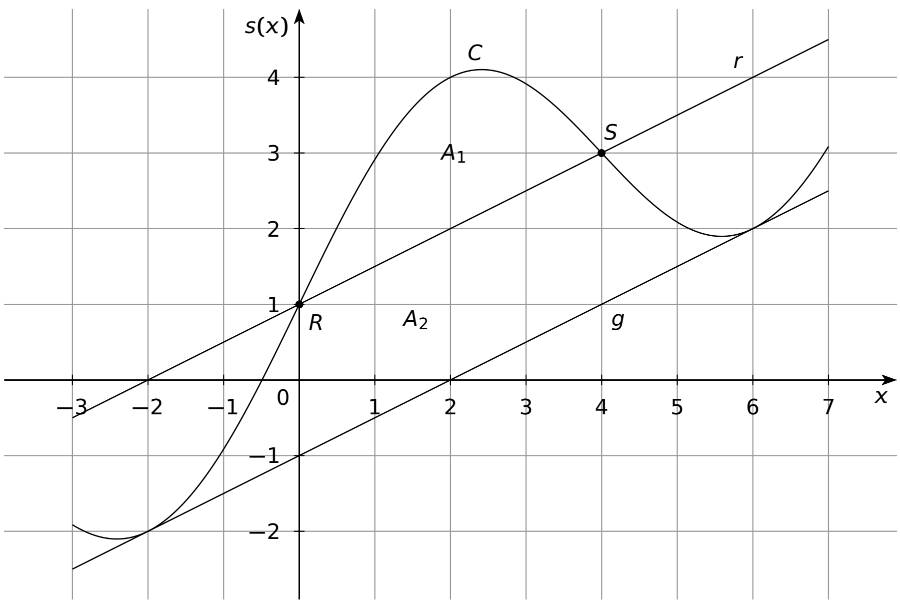
▶ Flächeninhalt der größeren Teilfläche

Gesucht ist der Inhalt einer Fläche, die zwischen g, C und der Parallelen r zu g durch den Punkt $R(0\,|\,1)$ begrenzt ist. Um sich diese besser vorstellen zu können, ist eine Skizze sinnvoll.

Die Funktionsgleichung von r unterscheidet sich dabei von der Gleichung von g nur im y-Achsenabschnitt. Durch die Parallelität bleibt die Steigung $0,5$ erhalten. Der Abschnitt befindet sich wegen R bei $c=1$:

$r(x)=0,5x+1.$

Die Skizze kann infolgedessen so aussehen:



Da nicht bekannt ist, welche der beiden Schnittflächen die Größere ist, bestimmen wir zunächst die Gesamtfläche A und dann den Inhalt von A_1. Aus der Differenz

$A-A_1=A_2$

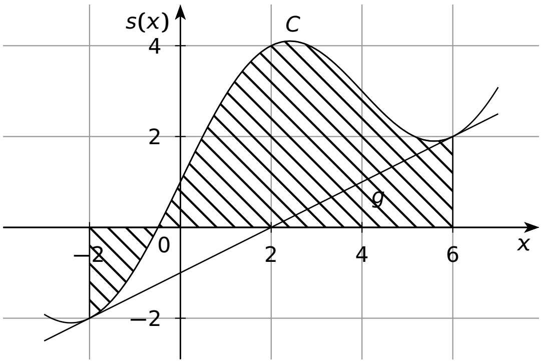
können wir herauslesen, welche Fläche gefragt ist.

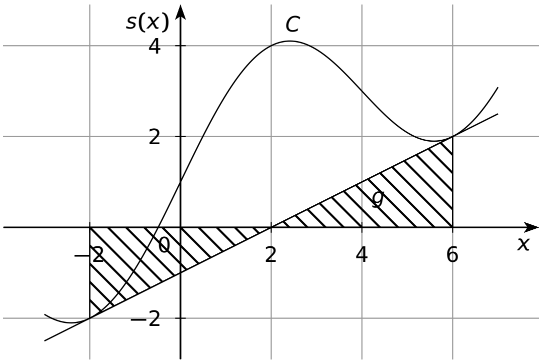
Die Gesamtfläche A ist - wie wir in der Skizze erkennen können - im Intervall zwischen den beiden Berührstellen von g und C eingeschlossen, dieses lautet dann:

$[-2;6]$.

Flächen unter Kurven können durch den Betrag des Integrals über das Intervall bestimmt werden, innerhalb dessen sie sich bewegen.

Bilden wir das Integral von s im betrachteten Intervall $[-2;6]$, so ergibt sich die Fläche wie links in der Zeichnung. Bilden wir das Integral von g im betrachteten Intervall, ergibt sich die Fläche in der rechten Zeichnung:





Zieht man diese Flächen voneinander ab und bildet den Betrag, ergibt sich die gesuchte Gesamtfläche A:

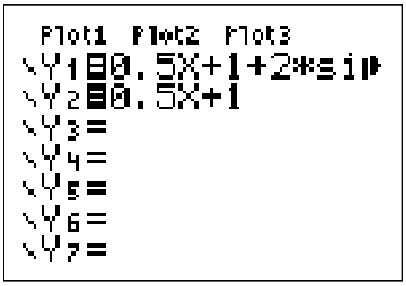
$$A = \left| \int_{-2}^{6} (s(x) - g(x))\, \mathrm{d}x \right|$$

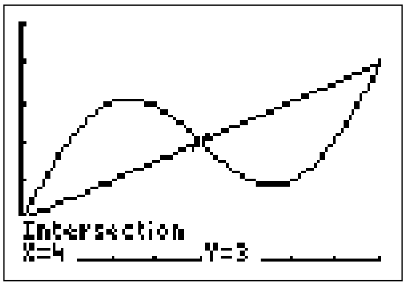
Der Flächeninhalt von A_1 wird ebenfalls über eine solche Differenz bestimmt. Jedoch ist A_1 nicht zwischen C und g, sondern zwischen C und r eingeschlossen. Das Intervall, innerhalb dessen sich die gesuchte Fläche befindet, ist durch die Schnittpunkte R und S der beiden Schaubilder bestimmt.

R liegt bei $x = 0$, für S gilt:

$s(x) = r(x)$.

Durch graphisches Lösen dieser Gleichung mit dem GTR ergibt sich die obere Grenzen des Intervalls zu





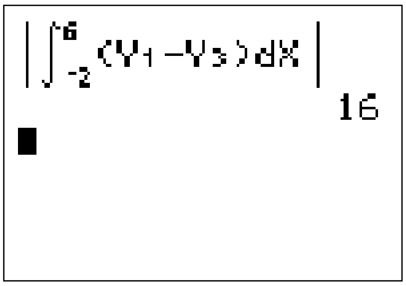
$x = 4$.

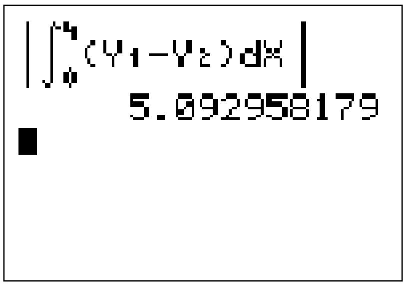
Für den Inhalt der Fläche A_1 folgt daraus analog zu A:

$$A_1 = \left| \int_0^4 (s(x) - r(x))\, \mathrm{d}x \right|$$

Berechne nun die beiden Inhalte mithilfe des GTR und bilde schließlich ihre Differenz, um den Inhalt der größeren Fläche angeben zu können.

Gib zur Berechnung der Flächeninhalte zunächst die Funktionsgleichungen von s, g und r in den $\boxed{\texttt{Y=}}$-Editor ein und verlasse diesen anschließend mit $\boxed{\texttt{2ND} \rightarrow \texttt{QUIT}}$.Füge das Integral über $\boxed{\texttt{MATH} \rightarrow 9}$ ein. Den Betrag setzt du mit $\boxed{\texttt{MATH} \rightarrow \texttt{NUM} \rightarrow 1}$ und die Funktionsgleichungen kannst du mit $\boxed{\texttt{VARS} \rightarrow \texttt{Y-VARS} \rightarrow 1}$ einsetzen.





Der GTR liefert:

$A = 16\,\text{FE}$ und

$A_1 \approx 5,0930\,\text{FE}$.

Du kannst erkennen, dass A_2 die größere Fläche sein muss. Bilde die Differenz aus A und A_1 und bestimme den Inhalt der gesuchten Fläche A_2:

$A_2 = A - A_1 = 16 - 5,0930 = 10,907\,\text{FE}$.

Die größere Teilfläche hat damit den Inhalt $10,907\,\text{FE}$.

1.2.3► **Wendepunkte von C** (6P)

In Wendepunkten wird die Steigung einer Funktion extremal. Die Steigung einer Funktion wird durch ihre erste Ableitung definiert, in unserem Fall s'.
In einem Extremum von s' ist die Steigung der Funktion gleich Null. Die Steigung von s' wird wiederum durch die Ableitung s'' der Funktion s' gegeben. Diese wird im einem Extremum Null, es folgt daraus die notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$s''(x) = 0$

An einem Maximum der Steigung findet zudem ein Vorzeichenwechsel der Steigung statt. Ist die dritte Ableitung von s ungleich 0, so ist dies erfüllt. Wir prüfen also diese hinreichende Bedingung nach:

$s'''(x) \neq 0$

Bilde die entsprechenden Ableitungen von s und bestimme die Wendepunkte von C.

Für die zweite und dritte Ableitung von s folgt mithilfe der Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \frac{1}{2}x + 1 + 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\\
s'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\\
s''(x) &= -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\\
\boldsymbol{s''(x)} &= \boldsymbol{-\frac{\pi^2}{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}\\
s'''(x) &= -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi^2}{8}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\\
\boldsymbol{s'''(x)} &= \boldsymbol{-\frac{\pi^3}{32}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}
\end{aligned}
$$

Setze den Funktionsterm von s'' in die notwendige Bedingung ein und löse nach x auf:

$$s''(x) = 0$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{\pi^2}{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \qquad \mid :\left(-\tfrac{\pi^2}{8}\right)\\
0 &= \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)
\end{aligned}
$$

Der Sinus wird Null bei

$\sin(0+n\cdot\pi)$ mit $n\in\mathbb{Z}$.

Es gilt also die Gleichung:

$$n\cdot\pi = \frac{\pi}{4}x.$$

Löse nach x auf:

$$n\cdot\pi = \frac{\pi}{4}x \quad\Longrightarrow\quad n\cdot\pi\cdot\frac{4}{\pi} = x \quad\Longrightarrow\quad x = 4n$$

Bei $x=4n$ mit $n\in\mathbb{Z}$ befinden sich somit mögliche Wendestellen.
Setze das Ergebnis in die hinreichende Bedingung ein und prüfe durch Vereinfachen, ob diese erfüllt wird:

$$s'''(4n) = -\frac{\pi^3}{32}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4n\right) = -\frac{\pi^3}{32}\cdot\cos(\pi\cdot n) = -\frac{\pi^3}{32}\cdot(\pm 1) \neq 0$$

Bei $x=4n$ befinden sich damit definitiv Wendepunkte. Bestimme durch Einsetzen von $x=4n$ in $s(x)$ die y-Koordinaten dieser Punkte:

$$s(4n) = \frac{1}{2}\cdot 4n + 1 + 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4n\right) = 2n+1+2\cdot\sin(\pi n) = 2n+1+2\cdot 0 = 2n+1.$$

Die Koordinaten der Wendepunkte von C lauten damit

$W(4n\,|\,2n+1)$ mit $n\in\mathbb{Z}$.

▸ Begründung, dass alle Wendepunkte auf einer Geraden liegen

Wenn alle Wendepunkte auf einer Geraden liegen, muss ihre Ortskurve die Form

$y = mx + c$

aufweisen. Ist dies erfüllt, ist der Nachweis erbracht.

Die Ortskurve kannst du bilden, in dem du zunächst die Koordinaten als Gleichungen der Form $x = \dots$ und $y = \dots$ formulierst:

(1) $x = 4n$,

(2) $y = 2n + 1$.

Wenn du die erste Gleichung nach n auflöst und das Ergebnis in (2) einsetzt, erhältst die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte von C.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & x = 4n & \mid \cdot \frac{1}{4} \\
(1) & n = \frac{1}{4}x & \text{Setze in (2) ein:} \\
(2a) & y = 2 \cdot \frac{1}{4}x + 1 & \\
(2a) & y = \frac{1}{2}x + 1 &
\end{array}
$$

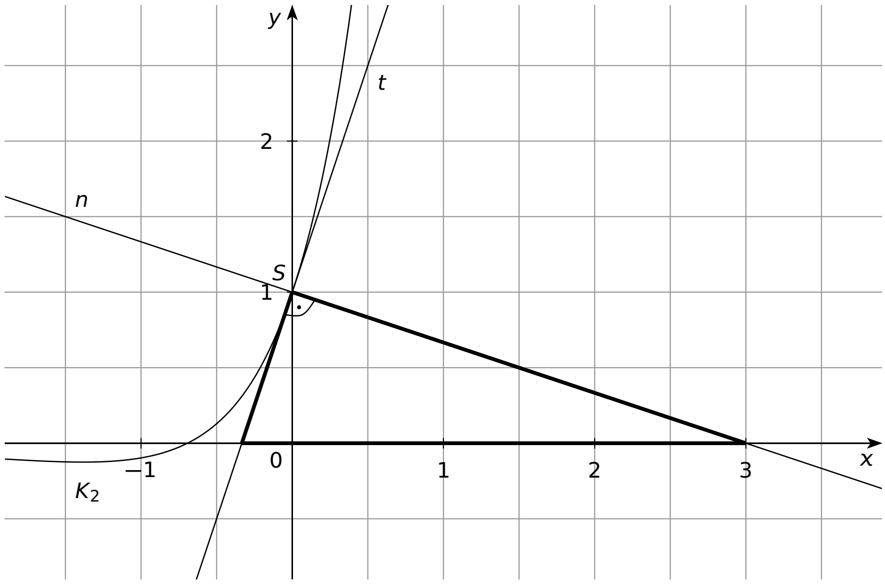
Die Ortskurve der Wendepunkte hat tatsächlich die Gleichung einer linearen Funktion, das heißt, alle Wendepunkte von C liegen auf einer Geraden.

1.3.1 ▸ Länge der Hypotenuse (4P)

Die Tangente t und die Normale n von K_2 schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein, dessen Hypotenuse bestimmt werden soll.

Eine Tangente an einer Kurve durch den Punkt $S(0\,|\,1)$ hat die Steigung der Kurve in diesem Punkt. Die Normale im gleichen Punkt steht senkrecht auf die Tangente. Es ergibt sich also in jedem Fall ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in S.

Eine Skizze verdeutlicht die Situation:



Du kannst erkennen, dass die Länge der Hypotenuse gerade dem Abstand der Nullstellen von t und n entspricht. Wir müssen also die Schnittpunkte der Normalen und Tangenten mit der x-Achse bestimmen. Dazu müssen wir

- zunächst die Gleichungen der Tangente und der Normalen aufstellen,
- anschließend ihre Nullstellen bestimmen
- und schließlich den Abstand dieser Stellen berechnen.

1. Schritt: Geradengleichungen aufstellen

Eine Gleichung einer Tangente am Schaubild einer Funktion f_2 im Punkt S hat allgemein die Form

$t(x) = f_2'(x_s) \cdot (x - x_s) + f_2(x_s)$,

wobei x_s und $f_2(x_s)$ den Koordinaten des Punktes und $f_2'(x_s)$ der Steigung in diesem Punkt entspricht.
Bilde daher die erste Ableitung von f_2 und bestimme die Steigung an der Stelle $x_s = 0$:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2 \cdot e^{2x} - e^x \\ f_2'(x) &= 2 \cdot 2 \cdot e^{2x} - e^x \\ \boldsymbol{f_2'(x)} &\boldsymbol{= 4 \cdot e^{2x} - e^x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2'(0) &= 4 \cdot e^{2 \cdot 0} - e^0 \\ &= 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Setze nun x_s, $f_2(x_s)$ und die Steigung $f_2'(x_s)$ in die Tangentengleichung ein und vereinfache den Term:

$$\begin{aligned} t(x) &= f_2'(x_s) \cdot (x - x_s) + f_2(x_s) \\ t(x) &= 3 \cdot (x - 0) + 1 \\ \boldsymbol{t(x)} &\boldsymbol{= 3x + 1} \end{aligned}$$

Die Gleichung der Normalen im Punkt S steht nun senkrecht auf die Gerade t. Ihre Steigungen m_t und m_n verhalten sich daher negativ reziprok zueinander:

$$m_n = -\frac{1}{m_t}.$$

Die Steigung der Tangenten ist $m_t = 3$. Für die Steigung der Normalen folgt

$$m_n = -\frac{1}{3}.$$

Die Normalengleichung lautet damit allgemein:

$$n(x) = m_n \cdot (x - x_s) + f_2(x_s).$$

Setze m_n, x_s und $f_2(x_s)$ in die Normalengleichung ein und vereinfache den Term:

$$\begin{aligned} n(x) &= m_n \cdot (x - x_s) + f_2(x_s) \\ n(x) &= -\frac{1}{3} \cdot (x - 0) + 1 \\ \boldsymbol{n(x)} &= \boldsymbol{-\frac{1}{3}x + 1} \end{aligned}$$

2. Schritt: Nullstellen von *t* und *n*

Nullstellen entsprechen Schnittpunkten mit der x-Achse. Da auf der x-Achse die Werte von Funktionen gleich Null sind, gelten für die Nullstellen von t und n die Bedingungen

(1) $t(x) = 0$ und

(2) $n(x) = 0$.

Setze die Funktionsterme für $t(x)$ und $n(x)$ in die Gleichungen ein und bestimme jeweils die Nullstellen:

$$\begin{aligned} (1) \quad t(x) &= 0 \\ 3x + 1 &= 0 \quad \mid -1 \; \cdot \frac{1}{3} \\ \boldsymbol{x_1} &= \boldsymbol{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad n(x) &= 0 \\ -\frac{1}{3}x + 1 &= 0 \quad \mid -1 \; \cdot (-3) \\ \boldsymbol{x_2} &= \boldsymbol{3} \end{aligned}$$

3. Schritt: Länge der Hypotenuse

Die Länge l der Hypotenuse entspricht gerade dem Abstand der Nullstellen von t und n:

$$l = x_2 - x_1.$$

Setze die Ergebnisse für x_1 und x_2 ein und ermittle die Länge:

$$l = 3 - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1}{3}\,\text{LE}.$$

Die Länge der Hypotenuse beträgt $3\frac{1}{3}$ LE.

1.3.2▶ Achsenschnittpunkte von K_a (4P)

Schnittpunkte mit der x-Achse haben generell die y-Koordinate Null. Für die Funktionswerte von f_a gilt dort daher:

$f_a(x) = 0.$

Schnittpunkte mit der y-Achse haben generell die x-Koordinate Null. Die Koordinaten eines Punktes von K_a auf der y-Achse lauten damit allgemein:

$C\,(0\,|\,f_a(0)).$

Es sind also zwei Arbeitsschritte notwendig:

1. Löse die Gleichung nach x auf und bestimme die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit x-Achse.

2. Bestimme $f_a(0)$ und damit die y-Koordinate mit der y-Achse.

1. Schritt: Schnittpunkte mit der x-Achse

Setze den Funktionsterm von f_a in die Gleichung ein und löse mit dem Satz vom Nullprodukt nach x auf:

$$
\begin{array}{lrcll}
 & f_a(x) & = & 0 & \\
 & a\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x & = & 0 & \text{Klammere } \mathrm{e}^x \text{ aus:} \\
 & \mathrm{e}^x \cdot (a\mathrm{e}^x - 1) & = & 0 & \text{Wenn ein Produkt Null wird, so muss einer seiner Faktoren Null sein:} \\
\text{(I)} & \mathrm{e}^x & = & 0 & \text{e-Funktionen werden nie Null} \rightarrow \text{keine Lösung!} \\
\text{(II)} & a\mathrm{e}^x - 1 & = & 0 & |\ +1\ |\cdot\frac{1}{a} \\
 & \mathrm{e}^x & = & \frac{1}{a} & |\ \ln \\
 & \ln(\mathrm{e}^x) & = & \ln\left(\frac{1}{a}\right) & \\
 & x\ln(\mathrm{e}) & = & \ln\left(\frac{1}{a}\right) & \ln(\mathrm{e}) = 1 \\
 & \boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{a}\right)} &
\end{array}
$$

Es gibt einen Schnittpunkt N von K_a mit der x-Achse bei $x = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$. Folglich hat dieser die Koordinaten

$\boldsymbol{N\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\middle|\,0\right)}.$

2. Schritt: Schnittpunkt mit der y-Achse

Bestimme $f_a(0)$ und damit die y-Koordinate des Schnittpunkts C mit der y-Achse:

$f_a(0) = a\mathrm{e}^{2\cdot 0} - \mathrm{e}^0 = a \cdot 1 - 1 = a - 1$

Damit hat C die Koordinaten

$\boldsymbol{C(0\,|\,a-1)}.$

▶ Werte für a bestimmen

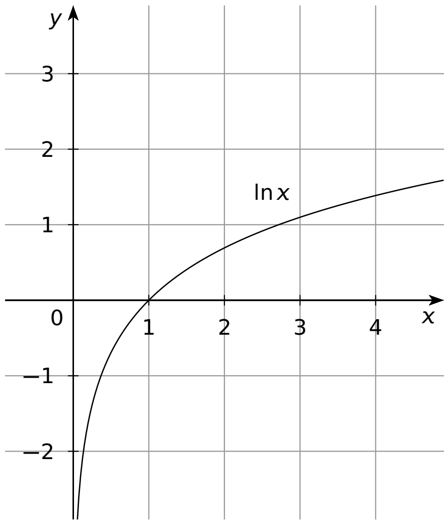
Wenn ein Punkt rechts von der y-Achse liegt, weist er immer eine positive x-Koordinate auf. Der Schnittpunkt N mit der x-Achse liegt also dann rechts von der x-Achse, wenn

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) > 0$$

gilt. Löse die Gleichung nach den gesuchten Werten für a auf:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{a}\right) &> 0 \\ \ln\left(a^{-1}\right) &> 0 \\ -\ln(a) &> 0 \qquad \mid \cdot(-1) \\ \ln(a) &< 0 \end{aligned}$$

Wir wissen dass der natürliche Logarithmus $\ln(a)$ nur für Werte $a > 0$ definiert ist. Zudem können wir aus dem Schaubild einer ln-Funktion unten im Bild erkennen, dass sie nur für Werte $0 < a < 1$ kleiner Null werden.



Für Werte von a im Intervall $]0;1[$ liegen die Schnittpunkte von K_a mit der x-Achse rechts von der y-Achse.

1.3.3 ▶ **Wert von a** (5P)

Gesucht ist der Parameter a in der Funktionsgleichung von f_a. Gegeben ist das Schaubild der Stammfunktion F_a von f_a. Wir können also aus dem Schaubild von F_a Informationen über f_a gewinnen, da f_a die erste Ableitung und damit die Steigung von F_a definiert.

Im Schaubild kannst du erkennen, dass bei $x = 0$ ein Minimum der Steigung eintritt. Die Steigung f_a ist dort also gleich Null. Damit gilt die Gleichung

$$f_a(0) = 0.$$

Löse die Gleichung nach a auf:

$$\begin{aligned} f_a(0) &= 0 \\ ae^{2\cdot 0} - e^0 &= 0 \\ a \cdot 1 - 1 &= 0 \\ a - 1 &= 0 \\ \boldsymbol{a} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Das Schaubild von F_a zeigt also F_1 mit $a = 1$.

► Funktionsterm von F_1

Die Gleichung einer Stammfunktion einer Funktion f_1 erhält man durch Integration dieser Funktion nach x und Addition eines Parameters C:

$$F_1(x) = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Den Wert des Parameters kannst du über eine Punktprobe bestimmen. Im Schaubild erkennst, du dass der Graph von F_1 durch den Punkt $(0 \mid 1)$ verlaufen soll.

Integriere zunächst und setze dann die Koordinaten des Punktes ein, um C zu bestimmen:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + C \\ &= \int \left(e^{2x} - e^x\right)\mathrm{d}x + C \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + C \end{aligned}$$

Einsetzen von $(0 \mid 1)$ ergibt dann:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} - e^0 + C \\ 1 &= \frac{1}{2}e^0 - e^0 + C \\ 1 &= \frac{1}{2} - 1 + C \\ 1 &= -\frac{1}{2} + C && \mid +\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} &= C \end{aligned}$$

Damit folgt die Gleichung

$$F_1(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \frac{3}{2}$$