a) (1) ► **Nullstellen von f berechnen** (13P)

Setze $f(x) = 0$ und löse die Gleichung nach x.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 + 3x^2 &= 0 \qquad \mid x^2 \text{ ausklammern} \\ x^2 \cdot (x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null wird. Also kennst du bereits die erste Lösung
$x^2 = 0$, d.h. $x_{1,2} = 0$
Bei $x = 0$ liegt also eine **doppelte Nullstelle** der Funktion f vor.
Setze nun die Klammer getrennt Null:

$$\begin{aligned} x + 3 &= 0 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Die Funktion f hat eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$ und eine einfache Nullstelle bei $x = -3$.

(2) ► **Koordinaten der Extrempunkte berechnen**

Eine Funktion besitzt eine Extremstelle an der Stelle x_E, wenn gilt:

- notwendige Bedingung $f'(x_E) = 0$,
- hinreichende Bedingung $f''(x_E) > 0$ für ein Minimum; $f''(x_E) < 0$ für ein Maximum.

Bestimme also im ersten Schritt die ersten beiden Ableitungen von f nach der Potenzregel und löse dann die Gleichung $f'(x) = 0$, um lokale Extremstellen zu bestimmen.
Alternativ kannst du die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkt auch mit deinem GTR berechnen.

►► **Lösungsweg A: Lösung von Hand**

1. Schritt: Ableitungen bilden

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 3 \cdot 2x \\ &= 3x^2 + 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3 \cdot 2x + 6 \\ &= 6x + 6 \end{aligned}$$

2. Schritt: Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 6x &= 0 \qquad \mid x \text{ ausklammern} \\ x \cdot (3x+6) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. Also erhältst du als erste Lösung
$x_1 = 0$
Setze noch die Klammer getrennt Null:

$$\begin{aligned} 3x + 6 &= 0 \quad &&| -6 \\ 3x &= -6 \quad &&| :3 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Du erhältst die potentiellen Extremstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

3. Schritt: hinreichende Bedingung

Berechne $f''(0)$ und $f''(-2)$, um die Art der Extremstellen zu ermitteln:

$$f''(0) = 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$$

Also liegt an der Stelle $x = 0$ ein **Tiefpunkt** des Graphen von f vor.

$$f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 = -6 < 0$$

Also liegt an der Stelle $x = -2$ ein **Hochpunkt** des Graphen von f vor.

4. Schritt: Zugehörige y-Koordinaten berechnen

Berechne mit $f(0)$ und $f(-2)$ mit y-Koordinaten der Extrempunkte:

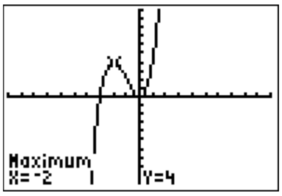
$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 \\ &= -8 + 3 \cdot 4 \\ &= -8 + 12 = 4 \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion f hat einen Tiefpunkt $T\,(0 \mid 0)$ und einen Hochpunkt $H\,(-2 \mid 4)$.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Zeichne den Graphen von f und berechne dann mit `2nd → TRACE (CALC) → maximum bzw. minimum` die Koordinaten der lokalen Extrempunkte.



Mit dem GTR ergibt sich: Der Graph der Funktion f hat einen Tiefpunkt $T\,(0 \mid 0)$ und einen Hochpunkt $H\,(-2 \mid 4)$.

Als Funktion dritten Grades kann die Funktion f nur höchstens zwei Extremstellen besitzen.

► Koordinaten der Wendepunkte berechnen

Eine Funktion besitzt eine Wendestelle an der Stelle x_W, wenn gilt:

- notwendige Bedingung $f''(x_W) = 0$,
- hinreichende Bedingung $f'''(x_W) \neq 0$

$f''(x)$ kennst du bereits; bestimme also die dritte Ableitung $f'''(x)$ nach der Potenzregel. Löse dann die Gleichung $f'(x) = 0$, um lokale Wendestellen zu bestimmen.

1. Schritt: Dritte Ableitung bilden

$$f'''(x) = 6$$

2. Schritt: Notwendiges Kriterium

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x+6 &= 0 \qquad \mid -6 \\ 6x &= -6 \qquad \mid :6 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Du erhältst die potentielle Wendestelle $x_W = -1$.

3. Schritt: hinreichende Bedingung

Wegen $f'''(-1) = 6 \neq 0$ liegt bei $x_W = -1$ tatsächlich eine Wendestelle vor.

4. Schritt: Zugehörige y-Koordinaten berechnen

Berechne mit $f(-1)$ y-Koordinate des Wendepunkts:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 \\ &= -1+3 = 2 \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion f hat einen Wendepunkt $W(-1 \mid 2)$.

b) (1) ► **Funktionsterm nachweisen** (8P)

Überlege, wie der Graph von f verschoben werden muss, damit der Wendepunkt $W(-1 \mid 2)$ im Ursprung des Koordinatensystems liegt:

- Er muss um eine Einheit in positive x-Richtung verschoben werden, also nach „rechts“
- Er muss um 2 Einheiten in negativen y-Richtung verschoben werden, also nach „unten“.

Den Graphen einer Funktion f verschiebst du um a Einheiten in x-Richtung und um b Einheiten in$y$-Richtung durch
$f(x-a)+b$.
Setze also a und b entsprechend ein und forme den Term so um, dass sich der Term aus der Aufgabenstellung ergibt.

$$\begin{aligned} h(x) = f(x-1)+2 &= (x-1)^3 + 3\cdot(x-1)^2 - 2 \\ &= (x-1)^3 + 3\cdot(x-1)^2 - 2 \\ &= (x-1)\cdot(x-1)^2 + 3\left(x^2-2x+1\right) - 2 \\ &= (x-1)\cdot(x^2-2x+1) + 3x^2 - 3\cdot 2x + 3 - 2 \\ &= x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 + 3x^2 - 6x + 1 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x^2 + -3x - 1 + 1 \\ h(x) &= x^3 - 3x \end{aligned}$$

Damit ist der Funktionsterm aus der Aufgabenstellung nachgewiesen.

(2) ► **Punktsymmetrie begründen**

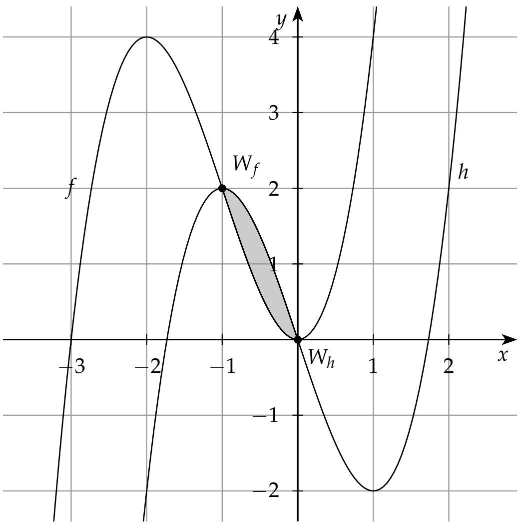
Du sollst begründen, dass der Graph von f punktsymmetrisch zu seinem Wendepunkt ist und dabei den Graphen der verschobenen Funktion h zu Hilfe nehmen. Betrachte also zunächst das Symmetrieverhalten des Graphen von h und schließe dann auf das Symmetrieverhalten des Graphen von f.

Überlege dabei: Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W(-1 \mid 2)$, wenn der Graph von h punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Betrachte den Funktionsterm von h: Es kommen nur **ungerade** Hochzahlen vor. Also ist der Graph von h punktsymmetrisch zum Ursprung.
Alternativ kannst du auch die Bedingung für Punktsymmetrie argumentieren:
$h(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -h(x)$.
Es gilt $h(-x) = -h(x)$. Also ist der Graph von h punktsymmetrisch zum Ursprung.

Durch die Verschiebung verändert sich das Symmetrieverhalten nicht, nur der Symmetriepunkt wird verschoben: Also ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W(-1 \mid 2)$.

c) (1) ► **Flächeninhalt berechnen** (14P)



Bei beiden Graphen schließen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Die Grenzen der Fläche sind dabei die **Schnittstellen** der Funktionen f und h. Du kannst so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die beiden Schnittstellen x_1 und x_2; setze dazu die Funktionsterme gleich. Du kannst sie auch mit deinem GTR bestimmen.
- Berechne im zweiten Schritt den Inhalt der eingeschlossenen Fläche mit dem Hauptsatz der Integralrechnung oder ebenfalls mit dem GTR.

1. Schritt: Schnittstellen berechnen

►► Lösungsweg A: Lösung von Hand

Setze die Funktionsterme gleich und löse die resultierende Gleichung nach x.

$$\begin{aligned}
f(x) &= h(x) \\
x^3 + 3x^2 &= x^3 - 3x && \mid -x^3 \\
3x^2 &= -3x && \mid +3x \\
3x^2 + 3x &= 0 && \mid 3x \text{ ausklammern} \\
3x \cdot (x+1) &= 0
\end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. Also erhältst du als erste Lösung $x_1 = 0$.

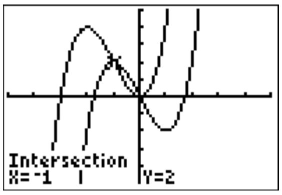
Setze nun die Klammer getrennt Null, um die zweite Lösung der Gleichung zu ermitteln

$$x + 1 = 0 \qquad | -1$$
$$x_2 = -1$$

Die Funktionen f und h besitzen Schnittstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Zeichne die Graphen von f und h und berechne dann mit `2nd → TRACE (CALC) → intersect` die Koordinaten der Schnittpunkte.



Mit dem GTR ergibt sich: Die Graph schneiden sich in den Punkten $S_1\,(-1 \mid 2)$ und $S_2 - (0 \mid 0)$.
Die Funktionen f und h besitzen Schnittstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$.

2. Schritt: Integral berechnen

Für den Inhalt A einer Schnittfläche, die von den Graphen zweier Funktionen f und h in den Grenzen x_1 und x_2 eingeschlossen wird, gilt:

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right|$$

Die Beträge sind dabei eine Maßnahme, um einen positiven Inhalt zu erhalten.

Auch hier kannst du die Aufgabe von Hand (Lösungsweg A) oder mit dem GTR (Lösungsweg B) lösen.

►► Lösungsweg A: Lösung von Hand

Berechne den Inhalt A der eingeschlossenen Fläche über den Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 3x^2 - (x^3 - 3x)\right)\,\mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 3x^2 - x^3 + 3x\right) \right| \\
&= \left| \int_{-1}^{0} \left(3x^2 + 3x\right) \right| \\
&= \left| \left[3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} \right| \\
&= \left| \left[x^3 + 1{,}5x^2\right]_{-1}^{0} \right| \\
&= \left| (0^3 + 1{,}5 \cdot 0) - ((-1)^3 + 1{,}5 \cdot (-1)^2) \right| \\
&= |0 - (-1 + 1{,}5)| \\
&= |-0{,}5| = 0{,}5
\end{aligned}$$

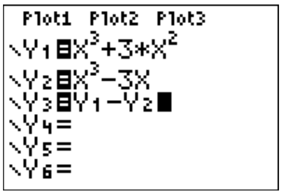
Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt etwa 0,5 FE.

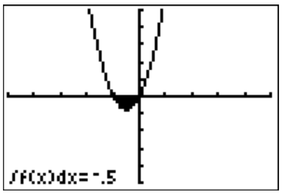
►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Im $Y\;=$-Menü des GTR haben wir $f(x)$ als Y_1 gespeichert und $h(x)$ als Y_2. Über `VARS → Y-VARS → Function` kannst du diese Bezeichnungen aufrufen und so bei Y_3 die Funktion

$\boxed{Y_1 - Y_2}$ definieren.

Zeichne ihren Graphen und berechne dann über $\boxed{\texttt{2nd} \rightarrow \texttt{TRACE (CALC)} \rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x}$ den Inhalt der eingeschlossenen Fläche. Gib als Grenzen $x = -1$ und $x = 0$ an.





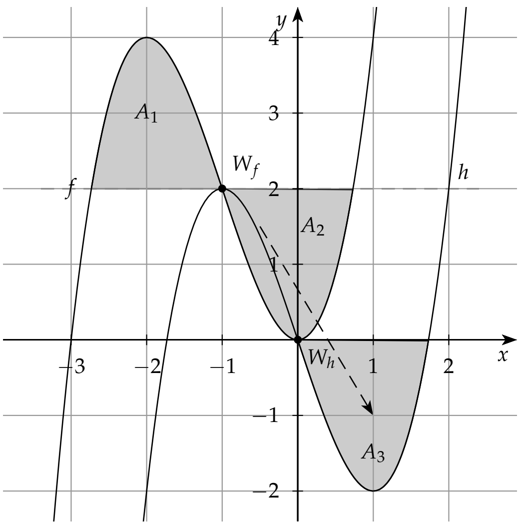
Der GTR liefert den Wert $-0,5$. Für Flächeninhalte kommen allerdings nur positive Werte in Frage.

Also ergibt sich: Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt etwa 0,5 FE.

(2) ▶ **Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnen**

Die Gerade p verläuft durch den Wendepunkt des Graphen von f und ist parallel zur x-Achse. Sie ist also eine waagerechte Gerade mit der Gleichung $y = 2$.

Sieh dir die eingeschlossene Fläche in einer Abbildung an.



Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt W_f. Also sind die Flächenstücke A_1 und A_2 gleich groß.

Der Graph von h entsteht durch Verschiebung des Graphen von f: Du erkennst, dass auch die Fläche A_3 den gleichen Flächeninhalt wie A_1 und A_2 besitzt.

Für den Inhalt A der Fläche, den der Graph von f mit der Geraden einschließt, gilt also:

$A = A_1 + A_2 = 2 \cdot A_3$

Du kannst so vorgehen:

- Berechne die Nullstellen der Funktion h, denn sie bilden die Grenzen der Fläche A_3
- Bestimme dann den Inhalt von A_3 über den Hauptsatz der Integralrechnung oder mit dem GTR

1. Schritt: Nullstellen von h berechnen

Setze $h(x) = 0$ und löse die Gleichung nach x.

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ x^3 - 3x &= 0 \qquad \mid x \text{ ausklammern} \\ x \cdot (x^2 - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null wird. Also erhältst du als erste Lösung

$x_1 = 0$

Nullsetzen der Klammer ergibt dann:

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &= 0 \qquad \mid +3 \\ x^2 &= 3 \qquad \mid \sqrt{\ } \\ x_{2,3} &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

h hat Nullstellen bei $x_1 = 0$ und bei $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. In unserem Fall interessieren x_1 und $x_2 = \sqrt{3}$.

2. Schritt: Integral berechnen

►► Lösungsweg A: Lösung von Hand

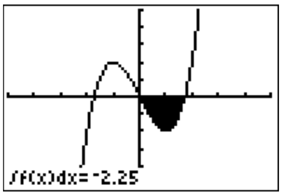
Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Fläche mit dem Hauptsatz der Integralrechnung. Da die Fläche vollständig unterhalb der x-Achse liegt, kannst du Betragsstriche setzen, um positive Ergebnisse zu erhalten.

$$\begin{aligned} A_3 &= \left| \int_0^{\sqrt{3}} h(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(x^3 - 3x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}} \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}} \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2} \cdot (\sqrt{3})^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{4} \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 3 - 0 \right| \\ &= \left| \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \right| \\ &= \left| -\frac{9}{4} \right| \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche ist $A_3 = \frac{9}{4}$.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Zeichne den Graphen von h und berechne dann mit $\boxed{\texttt{2nd} \to \texttt{TRACE (CALC)} \to \int f(x)\,\mathrm{d}x}$ das Integral.



Mit dem GTR ergibt sich: Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche ist $A_3 = 2,25$.

3. Schritt: Inhalt der Fläche A berechnen

Für den Inhalt A der Fläche, den der Graph von f mit der Geraden einschließt, gilt:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot A_3 \\ &= 2 \cdot 2,25 = 4,5 \end{aligned}$$

Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der Geraden p eingeschlossen wird, ist 4,5 FE groß.

d) (1) **► Gleichung von w_a ermitteln** (15P)

Eine Tangente ist eine Gerade und hat somit allgemein die Gleichung

$w_a : y = m_a x + b_a$

Dabei hat sie die gleiche Steigung wie die zugehörige Funktion im Berührpunkt. Die Steigung einer Funktion wird beschrieben durch die ihre erste Ableitung. Da die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt W_a anliegt, gilt für ihre Steigung m_a:

$m_a = f_a'(x_W)$.

Du kannst deshalb so vorgehen:

- Berechne die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f_a,
- bestimme die erste Ableitung f_a' von f_a und berechne die Steigung m_a
- Setze m_a und die Koordinaten des Wendepunkts in die Tangentengleichung ein und löse nach b_a auf.

1. Schritt: Wendestelle bestimmen

Eine Wendestelle x_W von f_a liegt vor, wenn gilt:

- $f_a''(x_W) = 0$
- $f_a'''(x_W) \neq 0$

Bestimme die ersten drei Ableitungen von f_a und untersuche dann die notwendige und die hinreichende Bedingung:

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= 3x^2 + 2ax \\ f_a''(x) &= 6x + 2a \\ f_a'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Setze $f_a''(x) = 0$, um die potentielle Wendestelle zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= 0 \\ 6x + 2a &= 0 \qquad | -2a \\ 6x &= -2a \qquad | :6 \\ x &= -\tfrac{1}{3}a \end{aligned}$$

Untersuche, ob die hinreichende Bedingung erfüllt ist:

$f_a'''\left(-\frac{1}{3}a\right) = 6 \neq 0$

Damit weißt du, dass bei $x = -\frac{1}{3}a$ tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt. Berechne zuletzt die zugehörige y-Koordinate:

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \left(-\frac{1}{3}a\right)^3 + a \cdot \left(-\frac{1}{3}a\right)^2 \\ &= -\frac{1}{27}a^3 + a \cdot \frac{1}{9}a^2 \\ &= -\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 \\ &= \frac{2}{27}a^3 \end{aligned}$$

Der Graph von f_a hat den Wendepunkt $W_a\left(-\frac{1}{3}a \mid \frac{2}{27}a^3\right)$

2. Schritt: m_a und b in der Tangentengleichung berechnen

Für die Steigung m_a der Tangente gilt:

$$\begin{aligned} m_a &= f'\left(-\frac{1}{3}a\right) \\ &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + 2a \cdot \left(-\frac{1}{3}a\right) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}a^2 \\ &= \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 \\ &= -\frac{1}{3}a^2 \end{aligned}$$

Setze m_a und die Koordinaten von W_a in die Gleichung der Tangente w_a ein:

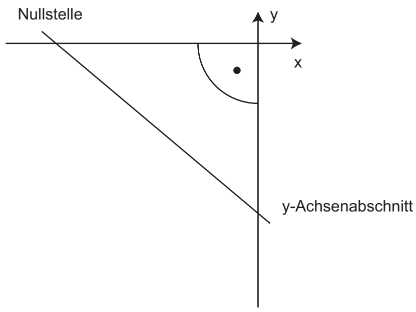
$$\begin{aligned} \frac{2}{27}a^3 &= -\frac{1}{3}a^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}a\right) + b_a \\ \frac{2}{27}a^3 &= \frac{1}{9}a^3 + b_a \qquad | -\frac{1}{9}a^3 \\ -\frac{1}{27}a^3 &= b_a \end{aligned}$$

Es folgt die Tangentengleichung

$w_a(x) = -\frac{1}{3}a^2 \cdot x - \frac{1}{27}a^3.$

(2) ► **Flächeninhalt berechnen**

Der dritte Quadrant ist der Quadrant „links unten": hier liegen die Punkte mit negativer x- und negativer y-Koordinate. Du kannst eine Skizze anfertigen.



- Die Steigung $-\frac{1}{3}a^2$ ist für jeden Wert von a **negativ**. Also fällt die Tangente.
- Da die Fläche im dritten Quadranten liegen soll, wird die Fläche nach rechts durch die y-Achse begrenzt, also durch $x = 0$. Nach links wird sie durch die Nullstelle der Tangente begrenzt.
- Ebenso wird die Fläche nach oben durch die x-Achse begrenzt. Nach unten wird sie durch die Schnittstelle der Tangente mit der y-Achse begrenzt.
- Die eingeschlossene Fläche ist also ein **rechtwinkliges Dreieck**: Die beiden Katheten liegen auf der x-Achse und der y-Achse; die Hypotenuse auf der Tangente.

Berechne also Nullstelle und y-Achsenabschnitt der Tangente und bestimme dann den Flächeninhalt des Dreiecks.

1. Schritt: Nullstelle und y-Achsenabschnitt berechnen

Den y-Achsenabschnitt kannst du direkt ablesen:

$$b_a = -\frac{1}{27}a^3.$$

Setze nun $w_a(x) = 0$, um die Nullstelle der Tangente zu berechnen. Beachte dabei, dass für a jede **positive** reelle Zahl eingesetzt werden darf. Es gilt also: $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}a^2 \cdot x - \frac{1}{27}a^3 &= 0 && \mid : a^2 \\
-\frac{1}{3}x - \frac{1}{27}a &= 0 && \mid +\frac{1}{27}a \\
-\frac{1}{3}x &= \frac{1}{27}a && \mid \cdot(-3) \\
x &= -\frac{1}{9}a
\end{aligned}$$

2. Schritt: Inhalt des Dreiecks berechnen

Eine Kathete (auf der y-Achse) hat die Länge $\frac{1}{27}a^3$, die andere Kathete (auf der x-Achse) hat die Länge $\frac{1}{9}a$.
Für den Inhalt A des Dreiecks gilt also:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{27}a^3 \cdot \frac{1}{9}a \\
&= \frac{1}{486}a^4
\end{aligned}$$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $\frac{1}{486}a^4$ FE.