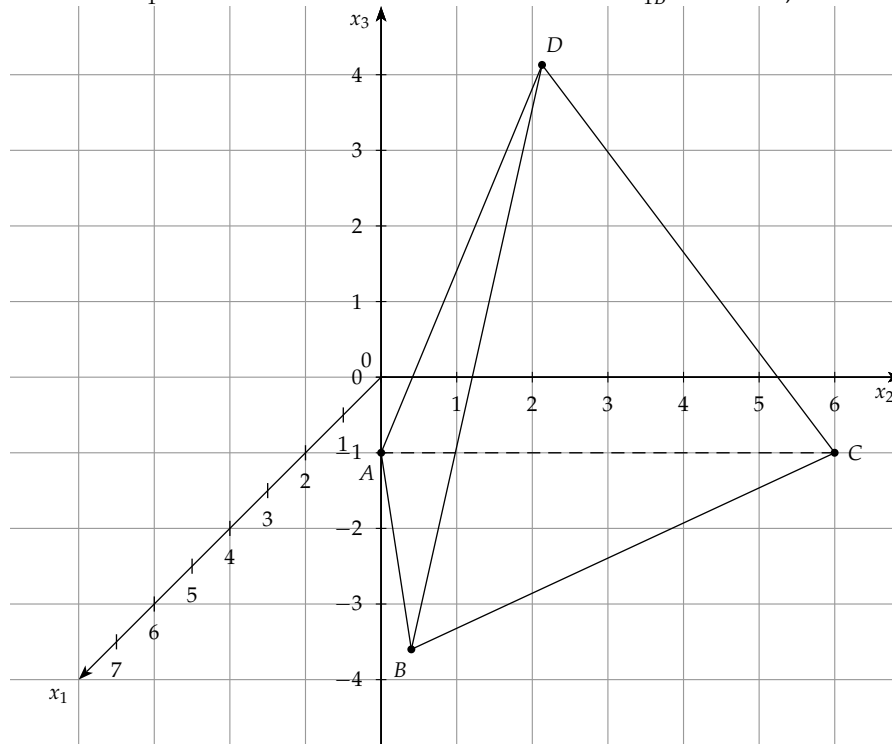


2.1 ► **Schaubild der Pyramide**

(3P)

Zeichne die Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem, Näherungswerte für die  $x_1$ -Koordinaten bei  $B$  und  $D$  sind  $x_{1B} = 1,7$  und  $x_{1D} = 5,2$ .


 2.2 ► **Nachweis, dass die Pyramide gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen hat**

(3P)

Ein Dreieck ist gleichschenklige, wenn seine Schenkel gleich lang sind. Die Pyramide hat die drei Dreiecke  $\triangle ABD$ ,  $\triangle BCD$  und  $\triangle CAD$  als Seitenflächen, die sich die Schenkel  $AD$ ,  $BD$  und  $CD$  teilen. Sind diese jeweils gleich lang, so stellen die Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke dar.

Die Länge der Schenkel wird durch den Abstand ihrer Endpunkte bestimmt. Allgemein gilt für den Abstand zweier Punkte  $X(x_1 | x_2 | x_3)$  und  $Y(y_1 | y_2 | y_3)$ :

$$\overline{XY} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

Bestimme die Längen der Schenkel  $AD$ ,  $BD$  und  $CD$ :

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (5 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{3 + 9 + 36} \\ &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \sqrt{(\sqrt{3} - 3\sqrt{3})^2 + (3 - 3)^2 + (5 - (-1))^2} & |\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}| \\ &= \sqrt{12 + 0 + 36} \\ &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (3 - 6)^2 + (5 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{3 + 9 + 36} \\ &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Schenkel der Dreiecke sind gleich lang. Somit hat die Pyramide gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen.

### 2.3 ► Bestimmung des Volumens der Pyramide

(4P)

Die gegebene Pyramide hat das gleichseitige Dreieck  $\triangle ABC$  zur Grundfläche und ihre Seitenkanten sind (wie zuvor gezeigt) gleich lang. Somit handelt es sich hierbei um eine gerade Pyramide. Das Volumen einer Pyramide berechnet sich über den Inhalt der Grundfläche  $G$  und die Höhe der Pyramide  $h$  durch folgende Formel:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

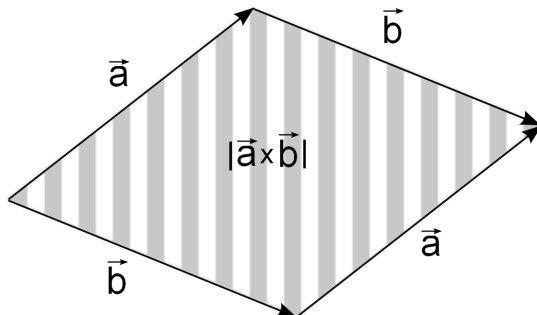
Bestimme nun  $G$  und  $h$  in zwei Arbeitsschritten:

#### 1. Schritt: Bestimmung von $G$ über das Vektorprodukt

Der Inhalt der Grundfläche  $G$  ist durch den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  gegeben. Diesen kann man mithilfe des Vektorprodukts (**Lösungsweg A**) oder über die Flächeninhaltsformel (**Lösungsweg B**) bestimmen.

#### ►► Lösungsweg A

Es gilt: Der Betrag des Vektorprodukts zweier Vektoren ergibt den Flächeninhalt des zugehörigen Parallelogramms:



Nehmen wir die zwei Vektoren der Grundfläche  $\vec{AB}$  und  $\vec{AC}$ . Der Betrag des Vektorprodukts ergibt den Flächeninhalt eines Parallelogramms. Dieser Flächeninhalt ist dann gerade doppelt so groß, wie der Inhalt des Dreiecks  $ABC$ . Für den Inhalt der Grundfläche  $G$  gilt somit:

$$G = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Die Vektoren  $\vec{AB}$  und  $\vec{AC}$  sind Verbindungsvektoren der Endpunkte der jeweiligen Strecke:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} - 0 \\ 3 - 0 \\ -1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 6 - 0 \\ -1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Inhalt der Grundfläche folgt daraus:

$$G = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$
$$G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

Das Vektorprodukt ergibt den Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 0 - 3\sqrt{3} \cdot 0 \\ 3\sqrt{3} \cdot 6 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen des Ergebnisses in die Gleichung für den Grundflächeninhalt erhältst du:

$$G = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{Bestimme nun den Betrag des Normalenvektors:}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (18\sqrt{3})^2}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(18\sqrt{3})^2}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Der Inhalt der Grundfläche beträgt  $9\sqrt{3}$  FE.

### ►► Lösungsweg B

Die Grundfläche  $ABC$  bildet ein gleichseitiges Dreieck. Die Flächeninhaltsformel eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $a$  lautet:

$$G = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Die Seitenlänge des Dreiecks  $ABC$  lässt sich durch den Betrag eines der bereits bekannten Vektoren bestimmen, etwa  $\vec{AB}$ :

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{27 + 9 + 0} = \sqrt{36} = 6$$

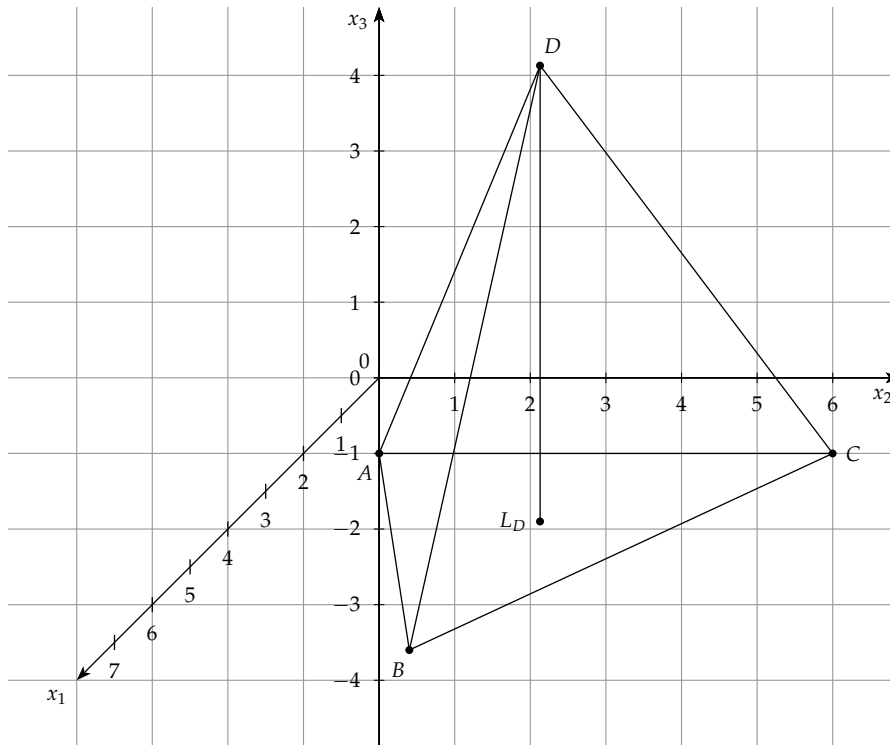
Durch Einsetzen in die Flächeninhaltsformel ergibt sich für  $G$ :

$$G = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{6^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Der Inhalt der Grundfläche beträgt  $9\sqrt{3}$  FE.

### 2. Schritt: Bestimmung von $h$ durch Betrachtung des Schaubildes

Die Höhe  $h$  der Pyramide ist gleich dem Abstand der Spitze  $D$  zum Lotfußpunkt  $L_D$  von  $D$  bezüglich der Ebene der Grundfläche. Da es sich um eine gerade Pyramide handelt und die Grundfläche parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene ist, sitzt dieser Lotfußpunkt direkt unterhalb von  $D$  in der Ebene der Grundfläche.



Wenn  $L_D$  direkt unterhalb von  $D$  liegt, hat  $L_D$  die gleichen  $x_1$ - und  $x_2$ -Koordinaten wie  $D$  und unterscheidet sich nur bezüglich der  $x_3$ -Koordinate. Es fällt auf, dass die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  der Grundfläche jeweils die gleiche  $x_3$ -Koordinate aufweisen, nämlich  $x_3 = -1$ . Damit haben automatisch alle Punkte der Ebene der Grundfläche diese  $x_3$ -Koordinate, also auch der Lotfußpunkt  $L_D$ .

$L_D$  hat somit die Koordinaten:

$$L_D(\sqrt{3} | 3 | -1)$$

Die Höhe  $h$  ist nun gleich dem Abstand von  $D$  und  $L_D$ . Dieser entspricht gerade der Differenz der  $x_3$ -Koordinaten:

$$h = 5 - (-1) = 6$$

Die Höhe  $h$  beträgt somit 6 LE.

Durch Einsetzen der Ergebnisse für  $G$  und  $h$  ergibt sich das Volumen der Pyramide zu:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 6$$

$$V_P = 18\sqrt{3}$$

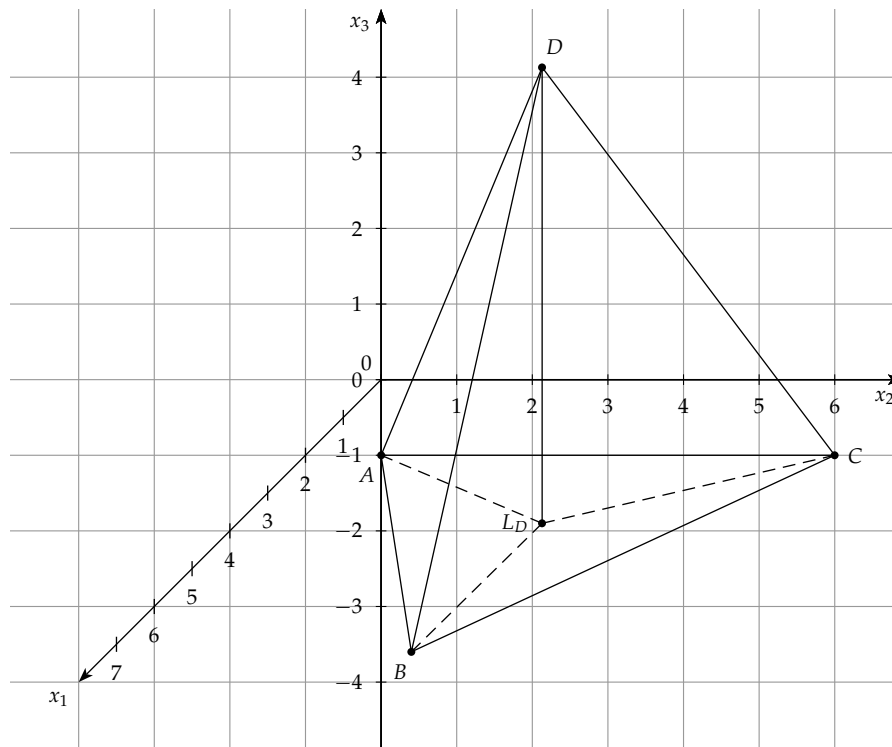
Das Volumen der Pyramide beträgt  $18\sqrt{3}$  VE.

#### 2.4 ► Bestimmung des Punktes mit gleichem Abstand zu $A$ , $B$ , $C$ und $D$

(5P)

Die gegebene Figur ist eine gerade Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche. Der Schwerpunkt des Dreiecks, also der Punkt, der den gleichen Abstand zu  $A$ ,  $B$  und  $C$  hat, befindet sich daher am Lotfußpunkt  $L_D$  der Spitze  $D$  bezüglich der Ebene durch  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

Das Lot durch  $L_D$  steht senkrecht auf die Ebene durch  $\triangle ABC$ . Alle Punkte auf der Geraden durch  $D$  und  $L_D$  sind daher Punkte, die von  $A$ ,  $B$  und  $C$  gleich weit entfernt sind.



Nun ist der Punkt auf dieser Geraden gesucht, für den gilt, dass er sowohl von den drei Punkten der Grundfläche als auch von der Spitze  $D$  den gleichen Abstand hat. Wir nennen diesen Punkt  $M$ . Da er sich auf der Geraden durch  $D$  und  $L_D$  bewegt, die parallel zur  $x_3$ -Achse ist, sind die  $x_1$ - und  $x_2$ -Koordinaten die gleichen wie bei  $L_D$  und nur die  $x_3$ -Koordinate ist variabel. Für  $M$  gilt somit:

$$M(\sqrt{3} \mid 3 \mid m_3)$$

Der Abstand von  $M$  zu einem der Eckpunkte der Grundfläche, etwa  $A$ , beträgt dann in Abhängigkeit von  $m_3$ :

$$\begin{aligned} |\vec{AM}| &= \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (-m_3 - 1)^2} \\ &= \sqrt{3 + 9 + 1 + 2m_3 + m_3^2} \\ &= \sqrt{13 + 2m_3 + m_3^2} \end{aligned}$$

Der Abstand von  $M$  zur Spitze  $D$  beträgt in Abhängigkeit von  $m_3$ :

$$\begin{aligned} |\vec{DM}| &= \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (3 - 3)^2 + (-m_3 + 5)^2} \\ &= \sqrt{(5 - m_3)^2} \\ &= 5 - m_3 \end{aligned}$$

$|\vec{AM}|$  soll nun genauso lang sein wie  $|\vec{DM}|$ .

Setze die beiden Terme gleich und löse nach  $m_3$  auf:

$$\begin{aligned}\sqrt{13 + 2m_3 + m_3^2} &= 5 - m_3 && |^2 \\ 13 + 2m_3 + m_3^2 &= (5 - m_3)^2 \\ 13 + 2m_3 + m_3^2 &= 25 - 10m_3 + m_3^2 && | -m_3^2 \\ 13 + 2m_3 &= 25 - 10m_3 && | -13 + 10m_3 \\ 12m_3 &= 12 \\ m_3 &= 1\end{aligned}$$

Probe (da das Quadrieren in Zeile 1 keine Äquivalenzumformung ist):

$$\begin{aligned}\sqrt{13 + 2 \cdot 1 + 1^2} &= 5 - 1 \\ \sqrt{16} &= 4 \\ 4 &= 4 && \text{wahre Aussage!}\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes  $M$  mit gleichem Abstand zu allen Eckpunkten der Pyramide lauten somit  $M(\sqrt{3} | 3 | 1)$ .