a) ► **Bestimmen des Winkels** (7BE)

Um den Winkel zwischen den Diagonalen zu bestimmen, stelle diese als Geraden g und i dar, mit

$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC}$
$i: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BD}$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$i: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Berechnen nun den Winkel zwischen den Geraden mit der Formel $\cos\varphi = \dfrac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}$

$|\overrightarrow{AC} \cdot |\overrightarrow{BD} = |-12+12| = 0$

Damit ergibt sich für den Winkel:

$\cos\varphi = \dfrac{0}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = 0$

Daraus folgt, dass $\varphi = 90°$. Wenn die Diagonalen in einem Rechteck senkrecht aufeinander stehen, muss das Rechteck ein Quadrat sein.

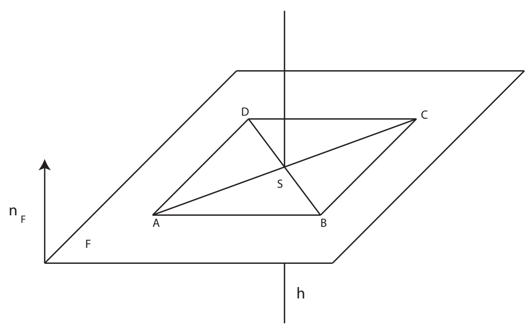
► **Ermitteln der Gleichung**

Es gibt 2 Möglichkeiten den **Stützvektor** zu berechnen:

► **Lösungsweg A: Stützvektor als Ortsvektor des Schnittpunkts**

Die Gerade h hat als Stützvektor den Ortsvektor des Schnittpunkts der beiden Geraden g und i. Der Richtungsvektor ist der Vektor, der senkrecht auf der Ebene F, in der das Rechteck liegt. Bestimme zuerst den Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$
$$r \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Daraus ergeben sich die Gleichungen:

I: $-2r + 6s = 2$
II: $8r = 4 \quad \Rightarrow r = \frac{1}{2}$
III: $2r + 6s = 4$

Setze $r = \frac{1}{2}$ ein in die erste Gleichung.

$-2 \cdot \frac{1}{2} + 6s = 2$
$\Rightarrow s = \frac{1}{2}$

Überprüfe die Lösungen in der dritten Gleichung:

$2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 3 = 4$

Somit sind die Lösungen $r = s = \frac{1}{2}$

Setze diese nun in die Geradengleichung ein und berechne den Schnittpunkt:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS}$$

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ dieses Schnittpunktes ist somit der Stützvektor der Geraden.

▶ Lösungsweg B: Stützvektor als Ortsvektor des Mittelpunktes

Berechne den Mittelpunkt der Strecke $\overrightarrow{AC}$ mit folgender Formel:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um den **Richtungsvektor** der Geraden, den Normalenvektor der Ebene F zu berechnen gibt es nun auch 2 Möglichkeiten:

▶ Lösungsweg A: Lösung über das Vektorprodukt

Gib zuerst eine Ebenengleichung in Parameterform an:

$$\begin{aligned} F: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berechne nun mithilfe des Vektorprodukts der beiden Spannvektoren den Normalenvektor der Ebene F:

$$\overrightarrow{n_F} = \begin{array}{cc} \hline 2 & -4 \\ 4 & 4 \\ 4 & -2 \\ 2 & -4 \\ 4 & 4 \\ 4 & -2 \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} -8-16 \\ -16+4 \\ 8+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

▶ Lösungsweg B: Lösung über das Skalarprodukt

Es gilt $\overrightarrow{n_F} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{n_F} \perp \overrightarrow{AD}$. Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt. Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{I} & \overrightarrow{n_F} \circ \overrightarrow{AB} = 0 & \\
\text{II} & \overrightarrow{n_F} \circ \overrightarrow{AD} = 0 & \\
\hline
\text{I} & 2n_1 + 4n_2 + 4n_3 = 0 & \mid 2\cdot\text{I}+\text{II} \\
\text{II} & -4n_1 + 4n_2 - 2n_3 = 0 & \\
\hline
\text{I}' & 12n_2 + 6n_3 = 0 & \text{wähle } n_2 = 1 \Rightarrow n_3 = -2 \\
\text{II}' & 2n_1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = 0 & \Rightarrow n_1 = 2
\end{array}
$$

Daraus folgt demnach $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Insgesamt folgt damit für die **Geradengleichung**:

$$h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

b) ► **Maßzahl des Volumens berechnen** (8BE)

Die Pyramiden sollen alle das gleiche Volumen haben. Das bedeutet, dass die Ebene E parallel zur Ebene F sein muss, denn Pyramiden mit der gleichen Grundfläche und der gleichen Höhe (auch wenn die Spitze schief steht) haben immer das gleiche Volumen.

Die Ebene E hat somit den gleichen Normalenvektor, wie die Ebene F:

$\overrightarrow{n_E} = k \cdot \overrightarrow{n_F}$

Der Punkt $P(-9 \mid 0 \mid 9)$ liegt in der Ebene E. Berechne mithilfe der Punktprobe die Koordinatengleichung von E.

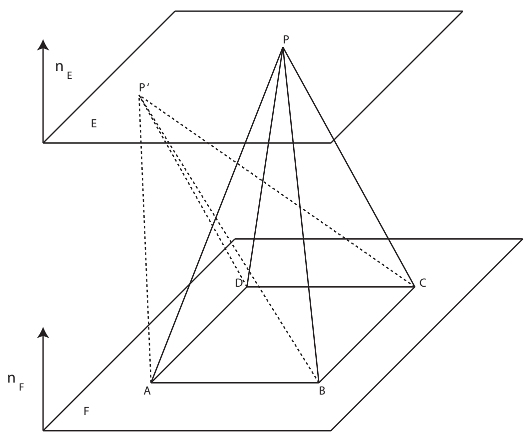
$$
\begin{aligned}
-2x + y - 2z &= d \\
-2 \cdot (-9) - 2 \cdot 9 &= -36
\end{aligned}
$$

Die Ebenengleichung lautet somit: $E: 2x + y - 2z = -36$.

Zeige nun mit der Punktprobe, dass der Punkt P auf h liegt:

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{rl}
-9 = -1 + 2t & \Rightarrow t = -4 \\
0 = 4 + t & \Rightarrow t = -4 \\
9 = 1 - 2t & \Rightarrow t = -4
\end{array}
$$



Daraus folgt, dass der Punkt P auf der Geraden h liegt.

Um das Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ zu berechnen, gibt es zwei Möglichkeiten:

▶ Lösungsweg A: Lösung über Beträge

Der Punkt P liegt auf der Gerade h und $h \perp F$. S liegt auf der Ebene F, somit berechnet man für die Höhe $|\overrightarrow{SP}|$. Für die Grundfläche gilt $A_G = a^2$ mit $a = |\overrightarrow{AB}|$.

$$a = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$h = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64+16+64} = 12$$

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 12 = 144$$

Das Volumen der Pyramiden ist somit $V = 144$ LE^3.

▶ Lösungsweg B: Lösung über das Spatprodukt

Das Volumen der Pyramide lässt sich auch mithilfe des Spatprodukts berechnen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \circ \overrightarrow{AP} \\ &= \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= 144 \end{aligned}$$

Das Volumen der Pyramiden ist somit $V = 144$ LE^3.