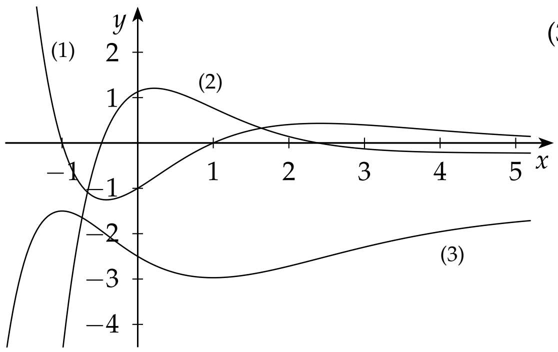
Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $y = f(x) = (x^2 - 1) \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad (x \in D_f)$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und das Verhalten von f im Unendlichen an. (7BE)

Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen und Näherungswerte für die Koordinaten der lokalen Extrempunkte sowie deren Art an.

b) Begründen Sie unter Verwendung von Funktionseigenschaften, dass der Graph der stetigen Funktion f mindestens zwei Wendepunkte besitzt. (2BE)

c) In nebenstehender Abbildung sind die Graphen der Funktion f, einer ihrer Stammfunktionen F und einer weiteren Funktion dargestellt. (3BE)
Geben Sie an, welche der drei Kurven den Graphen von f und welche den Graphen von F darstellt.
Begründen Sie Ihre Entscheidung für F.



d) Die Gerade t ist die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P(1;\, f(1))$. (6BE)
Ermitteln Sie ohne Verwendung von Näherungswerten eine Gleichung der Geraden t.
Die Gerade t und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt $\frac{1}{\mathrm{e}}$ hat.

e) Es existiert genau ein Wert u $(u \in \mathbb{R};\, -1 \leq u \leq 0)$, für den der Abstand des Punktes $Q_u(u;\, f(u))$ vom Koordinatenursprung maximal ist. (3BE)
Ermitteln Sie einen Näherungswert für u.

f) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen im dritten Quadranten eine Fläche vollständig. (4BE)
Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.
Für jedes b $(b \in \mathbb{R})$ ist eine Funktion g_b durch die Gleichung

$y = g_b(x) = f(x + b) \quad (x \in D_{g_b})$ gegeben.

Begründen Sie, dass für alle b mit $-1 < b < 1$ der Graph der Funktion g_b und beide Koordinatenachsen im dritten Quadranten eine Fläche vollständig begrenzen.

(25BE)