Ein Hüpfball (siehe Bild) besteht – vereinfacht gesehen – aus zwei Bällen und einem kreisförmigen Hüpfbrett, in das die Bälle eingelassen sind.
Das mathematische Modell besteht idealisiert aus einer oberen Kugel K, einer Ebene E, in der das Hüpfbrett liegt, und einer unteren Kugel K^*. Zunächst wird vereinfacht angenommen, dass K^* durch Spiegelung der Kugel K an der Ebene E entsteht.
In einem kartesischen Koordinatensystem hat die obere Kugel K die Gleichung

$$K : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 20x_1 - 20x_2 - 48x_3 + 632 = 0$$

und die Hüpfbrettebene E die Gleichung

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Wie in der Zeichnung dargestellt liegt der Hüpfball schräg auf dem Fußboden (x_1x_2-Ebene).
Das Ventil, über das der obere Ball des Hüpfballes aufgepumpt werden kann, liegt im oberen Schnittpunkt der Achse durch die Ballmittelpunkte (Symmetrieachse) mit der Kugel K.

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius R der Kugel K, die Koordinaten des Ventilpunktes V sowie den Winkel φ, den die oben genannte Symmetrieachse des Hüpfballs mit der x_1x_2-Ebene einschließt. (9P)
(Zur Kontrolle: Kugelmittelpunkt $M(10 \mid 10 \mid 24)$)

b) Zeigen Sie, dass die Ebene E die Kugel K schneidet, und bestimmen Sie den Mittelpunkt M_{kr} und den Flächeninhalt des Schnittkreises kr (Aussparung im Hüpfbrett) sowie die Koordinaten des Mittelpunktes M^* der Kugel K^*. (11P)
(Zur Kontrolle: $r_{kr} = 6$ und $M^* = (-2 \mid -2 \mid 12)$)

c) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte, in denen der Hüpfball den Boden berührt. (5P)

d) Die Hülle der beiden Bälle ist sehr elastisch. Der obere Ball wird weiter aufgepumpt. Die Aussparung im Hüpfbrett ändert sich dadurch nicht. Der unter Ball behält seine Größe. (5P)
Bestimmen Sie die Gleichung der Schar K_t aller Kugeln, die E im Schnittkreis kr schneiden.