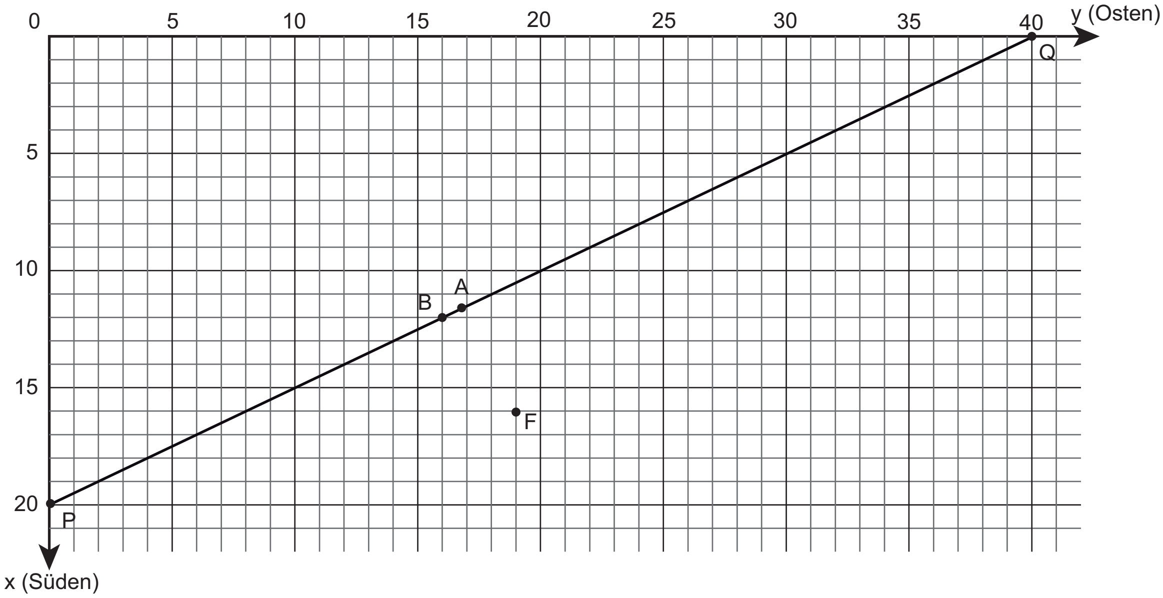
a) ▶ **Lage der Punkte nachweisen** (4BE)



Die Grundstücksgrenze wird durch eine Gerade beschrieben, welche durch die Punkte P und Q verläuft. Stelle zunächst eine Gleichung dieser Geraden auf:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ; t \in \mathbb{R}$$

Zeige nun durch **Punktprobe**, dass die beiden Punkte A und B auf dieser Geraden liegen:

Punkt A: $\begin{pmatrix} 11,6 \\ 16,8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die ersten beiden Zeilen dieser Vektorgleichung liefern:

$11,6 = 20 - t \qquad \Rightarrow \quad t = 8,4$

$16,8 = 2t \qquad \Rightarrow \quad t = 8,4$

Die beiden Werte für t stimmen überein; damit ist die Lage von A auf der Geraden nachgewiesen.

Verfahre ebenso für Punkt B:

Punkt B: $\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die ersten beiden Zeilen dieser Vektorgleichung liefern:

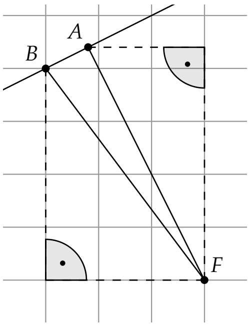
$12 = 20 - t \qquad \Rightarrow \quad t = 8$

$16 = 2t \qquad \Rightarrow \quad t = 8$

Auch Punkt B liegt auf der Geraden.

Damit ist die Lage der beiden Punkte auf der Grundstücksgrenze nachgewiesen.

► Entfernung zu F



Den Abstand zweier Punkte kannst du wie in der Skizze beschrieben mit dem **Satz des Pythagoras** berechnen. Die Kathetenlängen in den beiden Dreiecken ergeben sich dabei jeweils aus der **Differenz** der x-Koordinaten bzw. der y-Koordinate der jeweiligen Punkte

$$\begin{aligned}
|\overline{AF}| &= \sqrt{(16-11,6)^2+(19-16,8)^2}\\
&= \sqrt{4,4^2+2,2^2}\\
&= \sqrt{24,2}\\
&\approx 4,91\\
|\overline{BF}| &= \sqrt{(16-12)^2+(19-16)^2}\\
&= \sqrt{4^2+3^2}\\
&= \sqrt{25}\\
&= 5
\end{aligned}$$

Der Mast hat von Punkt A den Abstand 4,92 Meter und zu Punkt B hat er einen Abstand von 5 Meter.

► Tatsächliche Entfernung

Die tatsächliche Entfernung des Mastes zur Grundstückgrenze entspricht dem **Abstand** des Punktes F von der Geraden durch P und Q. Der Abstand wird dabei immer **senkrecht** zur Geraden gemessen und ist somit der Betrag des **Lots** von F auf die Gerade.

Prüfe also, ob einer der beiden Nachbarn den Abstand **senkrecht** zur Geraden durch P und Q gemessen hat, d.h. ob einer der Vektoren $\overrightarrow{AF}$ oder $\overrightarrow{BF}$ **senkrecht** zum Richtungsvektor der Geraden steht. Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr **Skalarprodukt** Null ergibt.

Punkt A: $\overrightarrow{AF} \circ \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4,4 \\ 2,2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -4,4 + 2 \cdot 2,2 = -4,4 + 4,4 = 0$

Punkt B: $\overrightarrow{BF} \circ \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 + 3 \cdot 2,2 = -4 + 6 = 2 \neq 0$

Der Abstand vom Punkt A zu Punkt F entspricht dem tatsächlichen Abstand des Mastes von der Grundstücksgrenze.

b) ▶ **Winkel der Sonnenstrahlen berechnen** (3BE)

Zunächst versuchen wir, die Richtung der eintreffenden Sonnenstrahlen durch einen Vektor zu beschreiben. Hierzu nutzen wir die Informationen aus der Aufgabenstellung:
Die Sonnenstrahlen passieren die Spitze des 7 m hohen Mastes, die sich im Punkt $S(16 \mid 19 \mid 7)$ befindet. Sie bilden diese Spitze ab auf einen Punkt S', der auf der Geraden durch P und Q liegt. Da die Sonnenstrahlen aus **Süden** kommen, stimmen die Punkte S und S' in ihrer y-Koordinate überein; S' hat also allgemein die Koordinaten $S'(x \mid 19 \mid 0)$.

Die fehlende x-Koordinate von S' kannst du durch eine **Punktprobe** ermitteln, da der Punkt ja auf der Geraden durch P und Q liegt:

$$\overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OS} \qquad ; t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{19-0}{2} = 9,5$$
$$x = 20 + 9,5 \cdot (-1) = 20 - 9,5 = 10,5$$

Die Spitze des Schattens fällt auf den Punkt $S'\,(10,5 \mid 19 \mid 0)$.

Für den Richtungsvektor der Sonnenstrahlen $\overrightarrow{SS'}$ folgt damit:

$$\overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{OS'} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 10,5 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

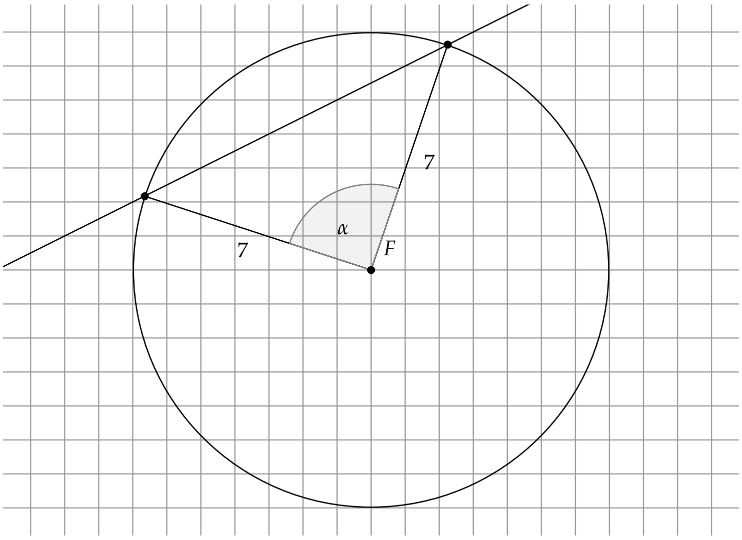
Gefragt ist nun nach dem **Winkel**, unter dem die Sonnenstrahlen in der x-y-Koordinatenebene eintreffen. Ein Normalenvektor der x-y-Koordinatenebene ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den Winkel α zwischen dem Sonnenstrahlenvektor und der Ebene gilt dann:

$$\sin\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} -5,5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -5,5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{7}{\sqrt{(-5,5)^2 + (-7)^2}} \approx 0,7863$$

Daraus folgt der Winkel $\alpha = \sin^{-1}(0{,}7863) \approx 51{,}84\,^\circ$

c) **► Wahrscheinlichkeit berechnen** (3BE)



Der Mast ist 7 m lang. Wie du oben in der Skizze sehen kannst, gibt es nur genau zwei mögliche Punkte, in denen die **Mastspitze** genau auf der Grundstücksgrenze liegt. Sie bilden die **untere und obere** Grenze des betroffenen Bereichs

Uns interessiert der **Winkel** dieses Kreisausschnitts, da er quasi unsere „günstigen Ereignisse“ darstellen, während die „möglichen Ereignisse“ durch den gesamten Kreis (360 °) dargestellt werden.

Ermittle nun die Koordinaten dieser beiden Punkte, nennen wir sie Z_1 und Z_2.:

Sie liegen auf der Geraden durch P und Q und haben somit allgemein die Koordinaten $(20 - t \mid 2t \mid 0)$ für jeweils einen bestimmten t-Wert.

Der Abstand von F zu einem dieser Punkte beträgt nach der Überlegung aus Teilaufgabe a):

$$d(Z;F) = \left|\overrightarrow{FZ}\right| = \left|\begin{pmatrix} (20-t) & - & 16 \\ 2t & - & 19 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4-t \\ 2t-19 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(4-t)^2 + (2t-19)^2}$$

Gesucht ist nach Werten für t, für die gilt:
$d(Z;F) = \sqrt{(4-t)^2 + (2t-19)^2} = 7$, d.h. $\sqrt{(4-t)^2 + (2t-19)^2} - 7 = 0$.

Diese Gleichung kannst du mit dem GTR lösen.

Zeichne den Graph der Funktion mit $y = \sqrt{(4-t)^2 + (2t-19)^2} - 7$ und bestimme dann mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{Zero}}$ die Nullstellen.

Der GTR liefert die Werte $t_1 \approx 6{,}173$ und $t_2 \approx 10{,}627$.

Setze diese Werte für t ein in die Gleichung der Geraden durch P und Q und erhalte die Koordinaten der Punkte

$Z_1\,(20-6{,}173 \mid 2\cdot 6{,}173 \mid 0) = Z_1\,(13{,}827 \mid 12{,}346 \mid 0)$
und
$Z_2\,(20-10{,}627 \mid 2\cdot 10{,}627 \mid 0) = Z_2\,(9{,}373 \mid 21{,}254 \mid 0)$

Der Winkel α aus der Abbildung oben ist genau der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{Z_1F}$ und $\overrightarrow{Z_2F}$. Für diese Vektoren gilt zunächst:

$$\overrightarrow{Z_1F} = \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9{,}373 \\ 21{,}254 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}627 \\ -2{,}254 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Z_2F} = \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13{,}827 \\ 12{,}346 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}173 \\ 6{,}654 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt für **Winkel**, den diese Vektoren einschließen:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{Z_1F}\circ\overrightarrow{Z_2F}}{\left|\overrightarrow{Z_1F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{Z_2F}\right|} &= \frac{\begin{pmatrix} 2{,}173 \\ 6{,}654 \\ 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 6{,}627 \\ -2{,}254 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2{,}173 \\ 6{,}654 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 6{,}627 \\ -2{,}254 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} \\ &= \frac{2{,}173\cdot 6{,}627 + 6{,}654\cdot(-2{,}254)}{\sqrt{(2{,}173)^2+(6{,}54)^2}\cdot\sqrt{(6{,}627)^2+(-2{,}254)^2}} \\ &= \frac{14{,}4-14{,}99}{\sqrt{47{,}49}\cdot\sqrt{48{,}99}} = \frac{-0{,}59}{48{,}23} \approx -0{,}012\end{aligned}$$

Daraus folgt der Winkel $\alpha = \cos^{-1}(-0{,}012) \approx 90{,}7\,^\circ$.

Für die Wahrscheinlichkeit gilt wie oben bereits angekündigt:

$$p = \frac{90{,}7\,^\circ}{360\,^\circ} \approx 0{,}2519$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $25{,}19\,\%$ erreicht der Mast beim Umfallen die Grundstücksgrenze.