3.1.1 ▶ **Jahr mit schnellsten Wachstum berechnen** (5P)

Überlege dir zunächst, was die Funktion h überhaupt beschreibt: h beschreibt die **Höhe** des Baumes. Die Änderungsrate der Höhe ist die Wachstumsgeschwindigkeit. Diese wird durch die erste Ableitung h' beschrieben.

Wenn also nach dem Jahr gesucht ist, in dem der Baum am schnellsten gewachsen ist, so ist nach der Stelle t gesucht, an der die **Wachstumsgeschwindigkeit** h' ein Maximum annimmt: Berechne also das Maximum der ersten Ableitung. Dies ist zugleich eine **Wendestelle** von h.

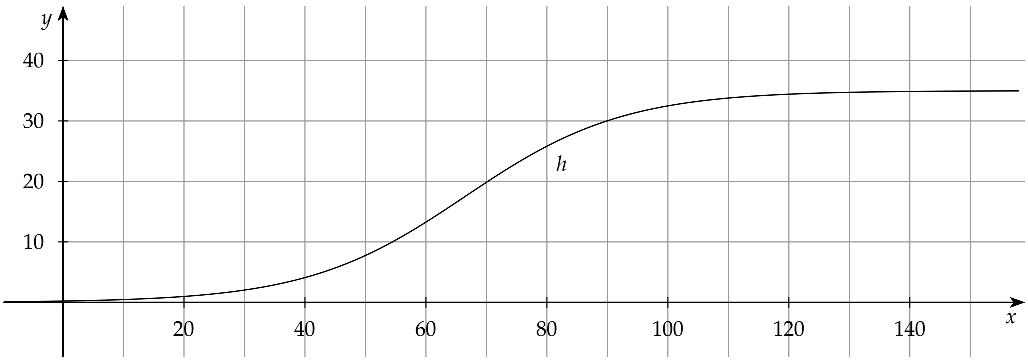
Du kannst so vorgehen:

- Definiere die ersten drei Ableitungen von h in deinem GTR.
- Für ein Maximum x_M von h' musst gelten
  - Notwendiges Kriterium $h''(x_M) = 0$,
  - hinreichendes Kriterium $h'''(x_M) < 0$.
- Ermittle auf diese Weise das Maximum von h'. Diese Stelle t gibt dir das Jahr seit Pflanzung an, zu dem der Baum am schnellsten gewachsen ist. Achte darauf, dass die Pflanzung im Frühling 1930 liegt.

▶ **Zeitpunkt bestimmen, zu dem der Baum zu 75 % ausgewachsen war**

Nun geht es wieder um die Höhe des Baumes, d.h. um die Funktion h. Du sollst den Zeitpunkt t bestimmen, zu dem der Baum zu 75 % ausgewachsen war. Hier stellt sich jedoch die Frage: Wie groß wird der Baum eigentlich?

Hierzu ist es wichtig, dass du das Schaubild von h in deinem GTR anzeigen lässt und es näher betrachtest. Dann erkennst du nämlich, dass die Funktionswerte von h – also die Höhe des Baumes – einer **oberen Grenze** annähern:



Der Baum wird also auch im Modell nicht unendlich groß, sondern nähert einem festen Wert, einem **Grenzwert** an. Dieser Grenzwert beschreibt die maximale Höhe des Baumes.

Du kannst jetzt so vorgehen:

- Berechne im ersten Schritt den Grenzwert von $h(t)$ und erhalte so die maximale Höhe des Baumes.
- Bestimme dann, wie groß der Baum ist, wenn er 75 % dieser Höhe erreicht hat.
- Ermittle zuletzt den zugehörigen Zeitpunkt t, indem du die Höhe für $h(t)$ einsetzt und nach t auflöst.

3.1.2 ▶ Durchschnittliches Jahreswachstum der letzten 10 Jahre bestimmen (2P)

Die Funktion h beschreibt die **Höhe** des Baums. In dieser Aufgabe ist nach dem durchschnittlichen Jahreswachstum des Baumes gefragt. Du sollst also berechnen, um welche Höhe der Baum innerhalb der 10 Jahre **im Schnitt** pro Jahr gewachsen ist. Ein anderer Begriff für die gesuchte Größe ist die **durchschnittliche Änderungsrate**.

Die „letzten zehn Jahre“ bezeichnen dabei den Abschnitt von 2003 bis 2013. Du kannst so vorgehen:

- Berechne, wie hoch der Baum im Jahr 2003 und im Jahr 2013 war.
- Bilde die Differenz der beiden Werte: Damit weißt du, um welche Höhe der Baum in 10 Jahren gewachsen ist.
- Teile die Differenz durch die vergangene Zeit, nämlich die 10 Jahre.
- *Alternativ* kannst du auch die Formel für die durchschnittliche Änderungsrate verwenden: $s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{h(a)-h(b)}{a-b}$, wobei a und b die beiden betrachteten Zeitpunkte 2003 bzw. 2013 sind.

3.2.1 ▶ Durchmesser der Schnittfläche berechnen (3P)

Die Funktion d gibt dir den Durchmesser des Baumstamms an, wobei x die Höhe in cm über dem Boden ist und $d(x)$ der Durchmesser, ebenfalls in cm. Laut Aufgabenstellung wird der Baum in diesem Jahr in einer Höhe von 30 cm gefällt. Gesucht ist der Durchmesser der Schnittfläche, d.h. den Durchmesser d des Baumstamms in der Höhe 30 cm.

▶ Länge des abgeschnittenen Stamms berechnen

Beachte, dass die Aufgabenstellung mit „aus diesem Modell“ betont, dass auch hier mit der Funktion d gerechnet werden soll, **nicht** mit der Funktion h. Du weißt, dass der Baum 30 cm über dem Boden abgeschnitten wurde, doch die Höhe des Baumes ist unbekannt. Diese kannst du allerdings mit der Funktion d ermitteln:

d gibt dir den **Durchmesser** des Baumes an. Der Baum endet in einer **Spitze**, nach oben hin wird sein Durchmesser also immer **kleiner**. Im Modell entspricht die Spitze einem **Punkt** mit Durchmesser Null.

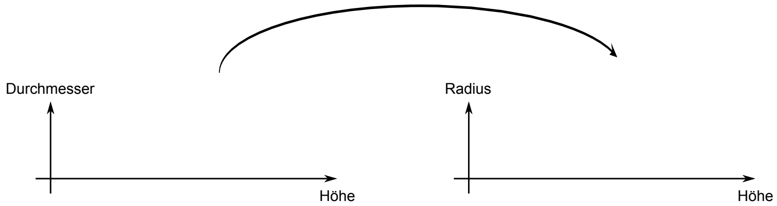
Bestimme also zunächst die Stelle x, an welcher der Durchmesser den Wert Null annimmt. Beachte, dass x in cm angegeben ist und deshalb einen sehr großen Wert annehmen kann.

Nachdem du so die Höhe des Baumes nach dem Modell d ermittelt hast, kannst du noch die 30 cm abziehen, die am Boden stehen bleiben. So erhältst du die Länge des Stamms.

3.2.2 ▶ **Volumen des Stamms ermitteln** (5P)

Wenn ein Volumen berechnet werden muss, dann läuft die Rechnung häufig auf einen **Rotationskörper** hinaus. Dies ist auch in diesem Aufgabenteil der Fall. Überlege dir, was die Funktion d genau tut: Auf der x-Achse ist die **Höhe** des Stamms abgetragen und auf der y-Achse der zugehörige Durchmesser.

Gesucht ist also **nicht** das Rotationsvolumen von d. Wenn nämlich der **Durchmesser** um die x-Achse rotiert, so ergibt sich ein Baum, der doppelt so dick ist. Es ist der **Radius**, der um die x-Achse rotieren muss, damit sich als Rotationskörper der richtige Baum ergibt.



Du kannst jetzt so vorgehen:

- Bestimme – ausgehend von d – eine Funktion r, welche dir den Radius des Baumes in Abhängigkeit der Höhe x angibt.
- Du weißt bereits, in welcher Höhe der Stamm beginnt und in welcher Höhe er endet. Diese beiden Stellen sind deine Integralgrenzen.
- Berechne über die Formel $V = \pi \cdot \int\limits_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$ das Volumen des Rotationskörpers und damit das Volumen des Stamms. Beachte, dass sich hier ein Ergebnis in cm^3 ergibt.

▶ **Geschätztes Volumen und prozentuale Abweichung berechnen**

Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass der Stamm vorab als **Kreiskegel** betrachtet wurde, wobei

- die Länge des Stamms (30 m) der **Höhe** des Kegels entspricht,
- der Durchmesser des Stamms (40 cm) dem Durchmesser des Kegels entspricht, also dem doppelten Radius.

Für das Volumen V_K eines Kreiskegels gilt:
$V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$,
wobei h die Höhe und r der Radius des Kreiskegels ist. Setze die gegebenen Werte ein und berechne das Volumen. Bestimme anschließend die prozentuale Abweichung zum oben ermittelten Volumen.