1. **▶ Begründung, dass sich das Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette deuten lässt** (11BE)

Das Zufallsexperiment lässt sich als Bernoulli-Kette deuten, da folgende **drei** Bedingungen erfüllt sind:

(1) Das Ausfüllen der einzelnen Tipps erfolgt **gleichartig** und **unabhängig voneinander**.

(2) Die Trefferwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, eine Zeile richtig auszufüllen, bleibt **konstant**, da immer nur eine der drei Möglichkeiten richtig ist.

(3) Als Ausgang bestehen stets nur **zwei Möglichkeiten**: Der Tipp war richtig oder eben falsch.

▶ Angabe der Parameter

In jeder Zeile ist nur eine der drei Möglichkeiten richtig, es werden 13 Zeilen getippt. Die Parameter der Bernoulli-Kette sind daher $n = 13$ sowie $p = \frac{1}{3}$.

▶ Wahrscheinlichkeit, dass ein Laie eine Tippreihe vollständig richtig ausfüllt

Sei X die Anzahl der richtig ausgefüllten Zeilen.

Um eine Tippreihe vollständig richtig auszufüllen, müssen $n = 13$ Reihen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ richtig ausgefüllt werden. Nach der einfachen Pfadregel gilt für diese Wahrscheinlichkeit:

$$P_{\frac{1}{3}}^{13}(X=13) = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{3}}_{\text{13 mal}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \approx 0{,}00000063 = 0{,}000063\%.$$

▶ Wahrscheinlichkeit, dass ein Laie gewinnt

Laut Aufgabentext gewinnt ein Laie, wenn er mindestens 10 Spiele richtig getippt wurden. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $P_{\frac{1}{3}}^{13}(X \geq 10)$.

Zwar sind für $n = 13$ und $p = \frac{1}{3}$ die Tabellen für die Binomialverteilung beigefügt, allerdings beziehen diese sich immer nur auf Werte X **kleiner gleich** k. Daher müssen wir zum Gegenereignis übergehen:

$$P_{\frac{1}{3}}^{13}(X \geq 10) = 1 - P_{\frac{1}{3}}^{13}(X \leq 9) = 1 - 0{,}9984 = 0{,}0016 = 0{,}16\%.$$

2. **▶ Wahrscheinlichkeit, dass der fußballinteressierte Spieler genau 10 Spiele richtig tippt** (7BE)

Für den fußballinteressierten TOTO-Spieler beträgt die Trefferwahrscheinlichkeit laut Aufgabentext $p = 45\% = 0{,}45$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er nun genau $X = 10$ Spielausgänge richtig voraussagt, lässt sich mit der Bernoulli-Formel berechnen:

$$P_{0{,}45}^{13}(X=10) = \binom{13}{10}\cdot 0{,}45^{10}\cdot 0{,}55^{3} \approx 0{,}0162 = 1{,}62\%.$$

▶ Dokumentation eines Rechenterms zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Wie oben gewinnt der Spieler, wenn er mindestens 10 Spielergebnisse richtig getippt hat. Für die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P_{0{,}45}^{13}(X \geq 10)$ gilt ausgeschrieben (d.h. als vollständiger Rechenterm):

$$\begin{aligned} P_{0{,}45}^{13}(X \geq 10) &= P_{0{,}45}^{13}(X=10) + P_{0{,}45}^{13}(X=11) + P_{0{,}45}^{13}(X=12) + P_{0{,}45}^{13}(X=13) \\ &= \sum_{k=10}^{13} P_{0{,}45}^{13}(X=k) = \sum_{k=10}^{13}\binom{13}{k}\cdot 0{,}45^{k}\cdot 0{,}55^{13-k}. \end{aligned}$$

Alternativ lässt sich diese Wahrscheinlichkeit auch über das Gegenereignis ausdrücken:

$$\begin{aligned}P_{0,45}^{13}(X \geq 10) &= 1 - P_{0,45}^{13}(X \leq 9)\\ &= 1 - \left[P_{0,45}^{13}(X=0) + P_{0,45}^{13}(X=1) + ... + P_{0,45}^{13}(X=9)\right]\\ &= 1 - \sum_{k=0}^{9} P_{0,45}^{13}(X=k) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{13}{k} \cdot 0{,}45^k \cdot 0{,}55^{13-k}.\end{aligned}$$

3.1 ▶ **Berechnung der fehlenden Gewinnbeträge** (12BE)

Vom Gesamtspieleinsatz von 635.399 € werden laut Aufgabentext 50% für die Ausschüttung der Gewinne verwendet und von diesem Ausschüttungsbetrag wiederum jeweils 25% für die einzelnen Gewinnklassen. In jeder Klasse werden also

$$\frac{635.399\text{ €}}{2 \cdot 4} = 79.424{,}875\text{ €}$$

an die Gewinner verteilt.

Beachten wir, dass der Gewinn auf volle 10 Cent **abgerundet** wird, bekommt jeder Gewinner der Gewinnklasse 1 also einen Betrag von

$$G_1 = \frac{79.424{,}875\text{ €}}{114} = 696{,}709...\text{ €} \mathrel{\widehat{=}} 696{,}70\text{ €}.$$

Entsprechend erhalten die Gewinner der Gewinnklasse 2 einen Betrag von

$$G_2 = \frac{79.424{,}875\text{ €}}{1.732} = 45{,}857...\text{ €} \mathrel{\widehat{=}} 45{,}80\text{ €}.$$

3.2 ▶ **Angabe der Anzahl abgegebener Tippreihen**

Wenn eine Tippreihe 50 Cent gekostet hat und damit insgesamt ein Gesamtspieleinsatz von 635.399 € erzielt wurde, wurde folgende Anzahl an Tippreihen abgegeben:

$$n = \frac{635.399\text{ €}}{0{,}50\text{ €}} = 1.270.798.$$

▶ **Berechnung der zu erwartenden Gewinne bei 45%-iger Trefferquote**

Der fußballinteressierte Toto-Spieler, der mit einer Trefferquote von 45 % den Tippschein ausfüllt, gewinnt laut Aufgabenstellung mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 %.

Bei 1.270.798 abgegebenen Tippreihen und einer Trefferquote von 45% wäre eine Anzahl von

$$E_{\text{theoretisch}} = n \cdot p = 1.270.798 \cdot 0{,}02 \approx 25.416 \text{ Gewinnen}$$

zu erwarten gewesen. Tatsächlich gab es jedoch

$$E_{\text{real}} = 114 + 1.732 + 12.727 + 53.143 = 67.716 \text{ Gewinne},$$

also mehr. Das heißt, dass die Trefferquote in der Realität über 45% lag.

▶ **Ermittlung eines ungefähren realen Wahrscheinlichkeitswertes**

Von den 1.270.798 abgegebenen Tippreihen gewannen 67.716. Die Wahrscheinlichkeit, eine **Tippreihe** zu gewinnen lag somit bei

$$\frac{67.716}{1.270.798} \approx 0{,}053 = 5{,}3\%.$$

Eine Tippreihe gilt als gewonnen, wenn **mindestens** 10 Spiele richtig getippt wurden. Sei X die Anzahl der richtig getippten Spiele, binomialverteilt mit $n = 13$ und p unbekannt. Es soll gelten:

$P(X \geq 10) = 0{,}053$, also $1 - P(X \leq 9) = 0{,}053$ und somit $P(X \leq 9) = 0{,}947$

In der Anlage zu den Aufgabenblättern findest du eine Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung mit $n = 13$:

Für $p = 0,6$ gilt: $P(X \leq 9) = 0,9922$, zu groß.
Für $p = 0,5$ gilt: $P(X \leq 9) = 0,9539$,
Für $p = 0,4$ gilt: $P(X \leq 9) = 1 - 0,1686 = 0,8314$, zu klein.

Die Trefferquote lag näherungsweise bei 50 %.