Ein quaderförmiges Wasserbecken mit 3 m Länge, 2 m Breite und 2 m Höhe hat einen Wasserzulauf und einen Wasserablauf.

Die Funktion f mit $f(x) = 0,2 \cdot x^3 - 2,1 \cdot x^2 + 5 \cdot x,\ 0 \leq x \leq 8$, beschreibt modellhaft die Änderungsrate der Wassermenge in diesem Becken. Dabei wird x in Stunden und $f(x)$ in Kubikmetern pro Stunde angegeben. Zu Beginn ist das Becken leer.

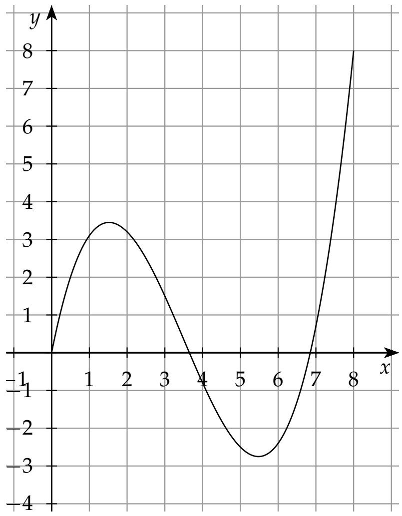
a) Berechnen Sie die Änderungsrate nach 2 Stunden. (15P)

Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)dx$ und dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist.

Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph von f dargestellt.
Begründen Sie mithilfe der Grafik, dass sich nur zu Beginn kein Wasser im Becken befindet.

Ermitteln Sie für die Gesamtzeitdauer von 8 Stunden den zeitlichen Anteil in Prozent, für den die Wassermenge im Becken abnimmt.



b) Bestimmen Sie den zweiten Zeitpunkt, zu dem das Becken genau zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist. (15P)

Ermitteln Sie die Wassermengen, die zu genau drei Zeitpunkten angenommen werden.

Ermitteln Sie die maximale Höhe des Wasserstandes im Becken innerhalb des betrachteten Zeitintervalls von 8 Stunden.

c) Bei gleichen Ausgangsbedingungen soll die Änderungsrate der Wassermenge nun modellhaft durch die folgende zusammengesetzte Funktion h beschrieben werden: (16P)

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = 0,2 \cdot x^3 - 2,1 \cdot x^2 + 5 \cdot x & \text{für } 0 \leq x < 2,5 \\ g(x) = 2,5 \cdot \mathrm{e}^{1,75 - 0,7 \cdot x} & \text{für } 2,5 \leq x < \infty \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion h an der Übergangsstelle stetig und differenzierbar ist.

Zeigen Sie, dass G mit $G(x) = -\frac{25}{7} \cdot \mathrm{e}^{1,75 - 0,7 \cdot x}$ eine Stammfunktion von g ist.

Untersuchen Sie, ob das Wasserbecken jemals überläuft.

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionsschar f_k mit $f_k(x) = 0,2 \cdot x^3 - k \cdot x^2 + 5 \cdot x,\ k > 0,\ x \in \mathbb{R}$, betrachtet. (14P)
Die Tangenten an die Graphen von f_k in den Punkten $Q_k(5 \mid f_k(5))$ werden mit t_k bezeichnet.
Begründen Sie: Für alle $k > 0$ ist die Gerade durch $R(2,5 \mid 0)$ und $Q_k(5 \mid f_k(5))$ gleichzeitig auch Tangente im Punkt $Q_k(5 \mid f_k(5))$.

Für die Koordinate der Wendepunkte gilt jeweils: $y_k = \frac{25}{3} \cdot k - \frac{50}{27} \cdot k^3$.

Untersuchen Sie, ob es Wendepunkte gibt, für die die y-Koordinate fünfmal so groß ist wie die dazugehörige x-Koordinate.

(60P)