1.1) ► **Entscheiden, wie viele Nullstellen die Funktion f besitzt**

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm

$$\boldsymbol{f(x) = x \cdot (x-7) \cdot (x^2+4);\ x \in \mathbb{R}}$$

Gib an, wie viele Nullstellen f besitzt.
Eine Nullstelle an x_0 liegt dann vor, wenn der Funktionswert $f(x_0)$ an dieser Stelle x_0 Null ist. Dazu kannst du den **Satz vom Nullprodukt** verwenden: Dieser besagt, dass ein Ausdruck genau dann Null wird, wenn einer seiner Faktoren bereits gleich Null ist. Untersuche also, wann:

- x
- $(x-7)$
- (x^2+4)

gleich Null ist.

1. Schritt: Untersuchen, wann x gleich Null ist

Der Ausdruck x ist genau dann Null, wenn $x = 0$ eingesetzt wird. Das heißt, an $x_1 = 0$ befindet sich eine Nullstelle von f.

2. Schritt: Untersuchen, wann $(x-7)$ gleich Null ist

$(x-7)$ wird Null, wenn $x = 7$ gilt. Das heißt, an $x_2 = 7$ befindet sich eine weitere Nullstelle von f.

3. Schritt: Untersuchen, wann (x^2+4) gleich Null ist

Es soll $(x^2+4) = 0$ gelten. Um einen passenden Wert für x zu erhalten, kannst du folgende Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2+4 && \mid -4 \\ -4 &= x^2 && \mid \sqrt{\ } \end{aligned}$$

An dieser Stelle müssten wir die Wurzel ziehen. Da die Wurzelfunktion aber nicht für negative Zahlen definiert ist, gibt es keinen passenden Wert für x.

Insgesamt folgt, dass f **zwei Nullstellen** besitzt.

1.2) ► **Entscheiden, welche Funktion h an $x = 1$ eine Extremstelle besitzt**

Gegeben sind mehrere Funktionen h. Gib an, welche der Funktionen eine Extremstelle an $x = 1$ besitzt.
Liegt an einer Stelle x eine Extremstelle, so muss für die zugehörige Funktion h gelten:

- Notwendige Bedingung: $h'(x) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $h''(x) \neq 0$

Überprüfe die erste und zweite Ableitung der gegebenen Funktionen auf diese Bedingungen.

1. Schritt: $h(x) = e^x$ überprüfen

Leitest du die e-Funktion ab, so verändert sich diese nicht. Das heißt, es gilt:

$h'(x) = e^x;\ h''(x) = e^x$

Da du weißt, dass die e-Funktion für keinen Wert für x kleiner gleich Null werden kann, ist die notwendige Bedingung für eine Extremstelle niemals erfüllt. Folglich hat $h(x) = e^x$ keine Extremstelle an $x = 1$.

2. Schritt: $h(x) = \sin(x)$ überprüfen

Leitest du die $\sin(x)$-Funktion ab, so erhältst du folgende Ableitungen:

$h'(x) = \cos(x);\ h''(x) = -\sin(x)$

Damit eine Extremstelle an $x = 1$ vorliegt, muss nach notwendiger und hinreichender Bedingung gelten:

- $h'(x=1) = \cos(1) \overset{!}{=} 0$
- $h''(x=1) = -\sin(1) \overset{!}{\neq} 0$

Da die cos-Funktion aber nur an $\dots;\ -\frac{1}{2}\cdot\pi;\ \frac{1}{2}\cdot\pi;\ \frac{3}{2}\cdot\pi;\ \dots$ Nullstellen besitzt, kann die notwendige Bedingung nicht erfüllt werden. Damit liegt auch hier keine Extremstelle vor.

3. Schritt: $h(x) = \ln(x)$ überprüfen

Leitest du die $h(x) = \ln(x)$-Funktion ab, so erhältst du:

$h'(x) = \frac{1}{x};\ h''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Setzt du nun $x = 1$ ein, so erhältst du: $h'(1) = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$. Damit ist die notwendige Bedingung nicht erfüllt und es liegt auch hier keine Extremstelle vor.

4. Schritt: $h(x) = \frac{1}{x} + x$ überprüfen

Leitest du $h(x) = \frac{1}{x} + x$ ab, so erhältst du:

$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1;\ h''(x) = \frac{2}{x^3}$

Wir setzen nun $x = 1$ in beide Terme der Ableitungsfunktionen ein und erhalten:

- $h'(1) = -\frac{1}{1^2} + 1 = -1 + 1 = 0$
- $h''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 \neq 0$

Offensichtlich sind notwendige und hinreichende Bedingung für eine Extremstelle erfüllt. Das heißt, $h(x) = \frac{1}{x} + x$ besitzt an $x = 1$ eine **Extremstelle**.

5. Schritt: $h(x) = \sqrt{x}$ überprüfen

Leitest du $h(x) = \sqrt{x}$ ab, so erhältst du:

$h'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}};\ h''(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$

Einsetzen von $x = 1$ in den Term der ersten Ableitung liefert dir: $h'(1) = \frac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Damit ist die notwendige Bedingung nicht erfüllt, wodurch an $x = 1$ keine Extremstelle liegen kann.

1.3) ▶ **Wert des Integrals berechnen**

Gegeben ist das Integral:

$$\int_0^{a} (x^2 - 2\cdot x)\,dx;\; x \in \mathbb{R};\; a \in \mathbb{R}^+$$

Berechne dessen Wert.

$$\begin{aligned}\int_0^{a} (x^2 - 2\cdot x)\,dx &= \left[\tfrac{1}{3}\cdot x^3 - x^2\right]_0^a \\ &= \left(\tfrac{1}{3}\cdot a^3 - a^2\right) - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 0^3 - 0^2\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot a^3 - a^2\end{aligned}$$

Damit ist $\boldsymbol{\frac{1}{3}\cdot a^3 - a^2}$ die korrekte Antwort.

1.4) ▶ **Lagebeziehung der Geraden *g* und *i* untersuchen**

Gegeben sind die Geraden g und i mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \text{ und } i: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\; s,t \in \mathbb{R}$$

Um zu überprüfen, welche der aufgezählten Lagebeziehungen bei den beiden Geraden zutrifft, kannst du folgende Eigenschaften überprüfen:

- Identisch: Richtungsvektoren sind linear abhängig und es gibt gemeinsame Punkte.
- Echt parallel: Richtungsvektoren sind linear abhängig, keine gemeinsamen Punkte.
- Windschief: Die Geraden sind weder parallel, noch haben sie gemeinsame Punkte.
- Senkrecht: Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren ist gleich Null.

Wir prüfen also zunächst die Richtungsvektoren $\overrightarrow{r_g}$ und $\overrightarrow{r_i}$ auf lineare Abhängigkeit:

$$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Setzen wir $a = -1$, so gilt $-2 = -1\cdot 2$ **aber nicht** $3 = -1\cdot 3$. Folglich sind die Richtungsvektoren **nicht linear abhängig** und damit weder identisch, noch parallel.

Um zu überprüfen, ob die Geraden windschief zueinander sind, kannst du sie auf gemeinsame Punkte untersuchen.
Hier kannst du folgende Überlegung vornehmen: Da die Geraden nur Komponenten in x_1 bzw. x_2 Richtung haben, befinden wir uns im zweidimensionalen Raum. Da Geraden aber nur im dreidimensionalen Raum windschief sein können, schneiden sich die Geraden garantiert.
Damit liegt ein gemeinsamer Punkt vor, was wiederum heißt, dass die Geraden **nicht windschief** sein können.

Um zu überprüfen, ob die Geraden senkrecht zueinander sind, kannst du das Skalarprodukt der Richtungsvektoren bilden:

$$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=-2\cdot 2+3\cdot 3=-4+9=5\neq 0$$

Damit sind die Geraden **nicht senkrecht** zueinander.

1.5) ▸ **Fehler 1. Art beim Alternativentest**

Erkläre was ein Fehler 1. Art ist. Bei einem „Fehler“ wird

- die Nullhypothese fälschlicherweise angenommen oder
- fälschlicherweise abgelehnt.

Das heißt, es fallen die Optionen 1 und 2 weg. Da sich Nullhypothese und Alternativhypothese gegenseitig ausschließen, fällt auch diese Antwortmöglichkeit weg.

Die richtige Antwort ist:

Bei einem Alternativtest wird ein Fehler 1. Art begangen, wenn die Nullhypothese abgelehnt wird, aber die Nullhypothese zutrifft.

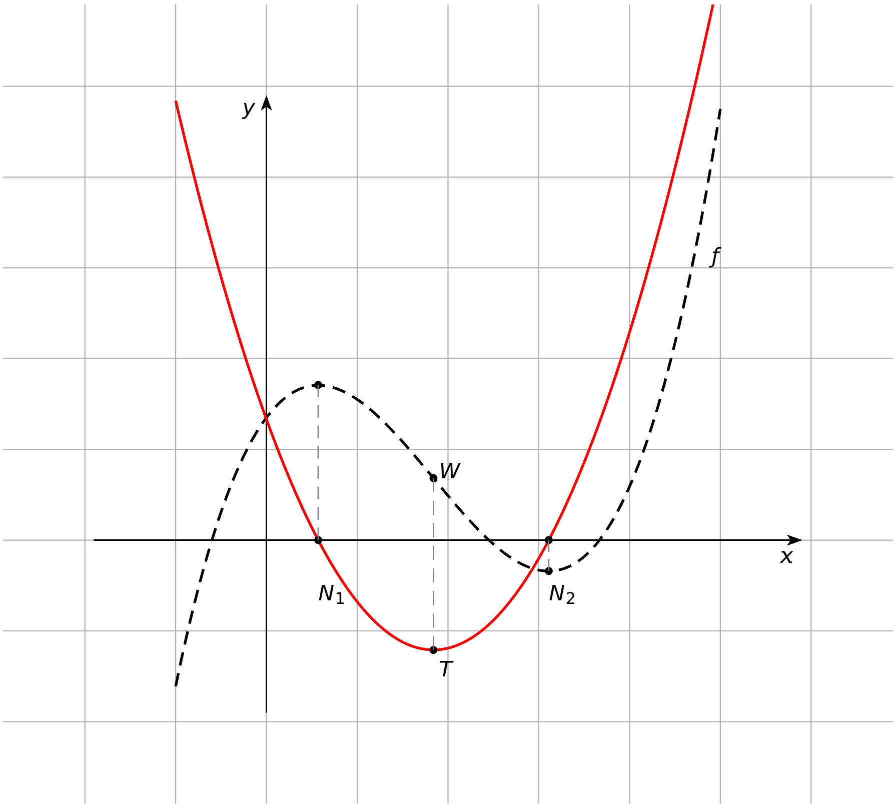
2.1) ▸ **Einzeichnen der ersten Ableitung**

In der Aufgabenstellung wird verraten, dass die Abbildung den Graphen einer ganzrationalen Funktion f 3. Grades mit dem Wendepunkt W zeigt. Deine Aufgabe ist es, den Graphen der ersten Ableitung in die beigefügte Abbildung einzuzeichnen.

Verwende dabei folgende Informationen:

- Ist die Funktion f 3. Grades, so ist f' eine Funktion 2. Grades und damit parabelförmig.
- Steigt der Graph von f, so ist f' positiv, fällt er, so wird f' negativ.
- An Extremstellen von f besitzt f' Nullstellen.
- An Wendestellen von f besitzt f' Extremstellen.

Mit Hilfe dieser Informationen kannst du nun den Graphen von f' einzeichnen:



2.2) ▸ **Begründen, dass die zweite Ableitung eine Gerade ist.**

Du sollst begründen, dass die zweite Ableitung der Funktion f eine Gerade (Funktion 1. Grades) ist.
In der Aufgabenstellung wird genannt, dass f eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist. Der Grad einer ganzrationale Funktion wird über den **größten Exponenten** des Funktionsterms definiert. Da beim Ableiten die Exponenten der zu ableitenden ganzrationale Funktion um 1 vermindert werden, wird auch der Grad um 1 vermindert.
Folglich ist bei zweimaligem Ableiten der Grad gleich 1 und die zweite Ableitung eine Gerade.

3) ▸ **Untersuchen, ob *A*, *B* und *C* Eckpunkte eines Dreiecks sind**

Untersuche, ob A, B und C die Eckpunkte eines Dreiecks darstellen. Damit ein Dreieck entstehen kann, dürfen die Punkte nicht alle auf einer Geraden liegen.
Du kannst dabei also wie folgt vorgehen:

- Stelle die Gleichung einer Geraden auf, die durch zwei dieser Punkte verläuft.
- Überprüfe, ob der dritte Punkt auf der Geraden liegt. Ist das **nicht** der Fall, so bilden die drei Punkte ein Dreieck.

1. Schritt: Gleichung einer Geraden aufstellen

Wir stellen die Geradengleichung einer Geraden g durch die Punkte A und B auf. Dabei verwenden wir die Koordinaten des Punktes A als Stützvektor und den Vektor $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Überprüfen, ob C auf der Geraden g liegt

Um zu überprüfen, ob der Punkt C auf der Geraden g liegt, kannst du dessen Ortsvektor mit der Geradengleichung von g gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Daraus erhältst du folgendes **lineares Gleichungssystem**, welches du nach s umformen sollst:

$$\begin{array}{lrcrcl|l}
(1) & 6 & = & -6 & + & s \cdot 4 & +6 \\
(2) & 5 & = & 2 & + & s \cdot 1 & -2 \\
(3) & -5 & = & 1 & - & s \cdot 2 & -1 \\
\hline
(1) & 12 & = & & + & s \cdot 4 & :4 \\
(2) & 3 & = & & + & s \cdot 1 & \\
(3) & -6 & = & & - & s \cdot 2 & :(-2) \\
\hline
(1) & 3 & = & & & s & \\
(2) & 3 & = & & & s & \\
(3) & 3 & = & & & s &
\end{array}$$

Du hast einen Wert für s ermittelt, sodass die Gerade den Punkt C darstellt. Damit liegen alle Punkte auf einer Geraden, was bedeutet, dass A, B und C **nicht die Eckpunkte** eines Dreiecks bilden.

4.1) ▸ **Wahrscheinlichkeit dafür angeben, dass zwei Gummibärchen rot sind**

In einer Gummibärenpackung befinden sich 10 Gummibärchen. Davon sind

- 7 rot,
- 2 gelb,
- 1 weiß.

Tina entnimmt einer vollen Werbepackung zufällig und ohne Zurücklegen zwei Gummibärchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese beiden Gummibärchen rot sind?

Hierbei handelt es sich um **Ziehen ohne Zurücklegen** ohne Beachten der Reihenfolge. Wir berechnen die gesuchte Wahrscheinlichkeit wie folgt:

$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den zwei gezogenen Gummibärchen zwei Rote befinden, beträgt $\frac{7}{15}$.

4.2) ▶ **Einsatz ermitteln, sodass weder Gewinn noch Verlust gemacht wird**

Es wird folgendes Gewinnspiel vorgeschlagen: Nora zahlt Einsatz und zieht **ohne Zurücklegen** zwei Gummibärchen.

- Sind beide gezogenen Gummibärchen rot, erhält Nora zwei Euro ausgezahlt.
- Sind beide gezogenen Gummibärchen gelb, so erhält sie drei Euro Auszahlung.
- Haben die beiden gezogenen Gummibärchen verschiedene Farben, so bekommt sie nichts ausgezahlt.

Wie hoch muss der Einsatz sein, dass Nora auf lange Sicht weder Verlust noch Gewinn macht?

Damit Nora weder Verlust noch Gewinn macht, muss der erwartete Gewinn dem Einsatz entsprechen. Den Erwartungswert berechnest du über:

$$\boxed{\mathbb{E} = \sum \boldsymbol{g_i \cdot p_i}}$$

Dabei stellen g_i die Gewinne und p_i die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten dar. Berechne den Erwartungswert, denn dieser soll laut Voraussetzung dem Einsatz entsprechen. Du kannst also wie folgt vorgehen:

- Berechne die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.
- Setze Wahrscheinlichkeiten und Gewinne in die Formel des Erwartungswerts und ermittle so den gesuchten Einsatz.

1. Schritt: Berechnen der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

Aus dem Aufgabenteil zuvor weißt du, dass die Wahrscheinlichkeit, 2 rote Gummibärchen zu ziehen, $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$ beträgt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Nora zwei gelbe Gummibärchen zieht, berechnet sich über: $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$.

Das letzte Ereignis berechnet sich schließlich über die **Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses**:
$1 - \frac{7}{15} - \frac{1}{45} = \frac{23}{45}$

2. Schritt: Einsetzen in Formel für Erwartungswert

Einsetzen in die Formel des Erwartungswerts liefert dir:

$$\mathbb{E} = \frac{7}{15} \cdot 2 + \frac{1}{45} \cdot 3 + \frac{23}{45} \cdot 0 = 1$$

Damit beträgt der erwartete Gewinn 1 €. Damit Nora also weder Verlust noch Gewinn macht, muss der Einsatz **1 €** betragen.