a) ▶ **Wendepunkt W$(2|2)$ nachweisen** (11P)

Laut Aufgabenstellung besitzt Funktion f folgenden Funktionsterm:

$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

Damit ein bestimmter Punkt Wendepunkt des Graphen von f ist, müssen an der zugehörigen Stelle drei Bedingungen erfüllt sein:

Zum einen muss der Punkt auf dem Graphen von f liegen und zum anderen müssen die notwendige und die hinreichende Bedingung erfüllt sein.

Die **notwendige Bedingung** für einen Wendepunkt ist, dass die zweite Ableitung von f an der betrachteten Stelle gleich Null ist:

$\boldsymbol{f''(x) = 0}$

Damit zusätzlich auch die **hinreichende Bedingung** für einen Wendepunktes erfüllt ist, muss die dritte Ableitung von f an der betrachteten Stelle ungleich Null sein:

$\boldsymbol{f'''(x) \neq 0}$

Damit die **notwendige Bedingung** an der Stelle $x_W = 2$ des Wendepunktes erfüllt ist, muss also gelten:

$\boldsymbol{f''(2) = 0}$

Darüber hinaus muss diese x-Koordinate von W auch die **hinreichende Bedingung** erfüllen. Nur wenn die Wendestelle $x_W = 2$ beide Bedingungen erfüllt, bezeichnet die x-Koordinate eine Wendestelle der Funktion f.

▶ **Steigung des Graphen an den Stellen $x = -2$ und $x = 6$, sowie im Punkt W bestimmen**

Die Ableitungsfunktion f' beschreibt die Steigung des Graphen von f.
Um also die Steigung des Graphen von f an den Stellen $x = -2$ und $x = 6$, sowie im Wendepunkt W zu bestimmen, setzt du die Stellen in den Funktionsterm $f'(x)$ der Ableitungsfunktion f' ein.

▶ **Begründen, dass im Punkt W die größte Steigung vorliegt**

Die erste Ableitung f' beschreibt die Steigung des Graphen von f.
An der Stelle des globalen Maximums des Graphen von f' liegt daher die größte Steigung des Graphen von f vor.

b) ▶ **Stammfunktion von f aufstellen** (14P)

Eine Stammfunktion stellst du mit Hilfe der Potenzregel der Integration auf.

▶ **Gerade g in das Koordinatensystem einzeichnen**

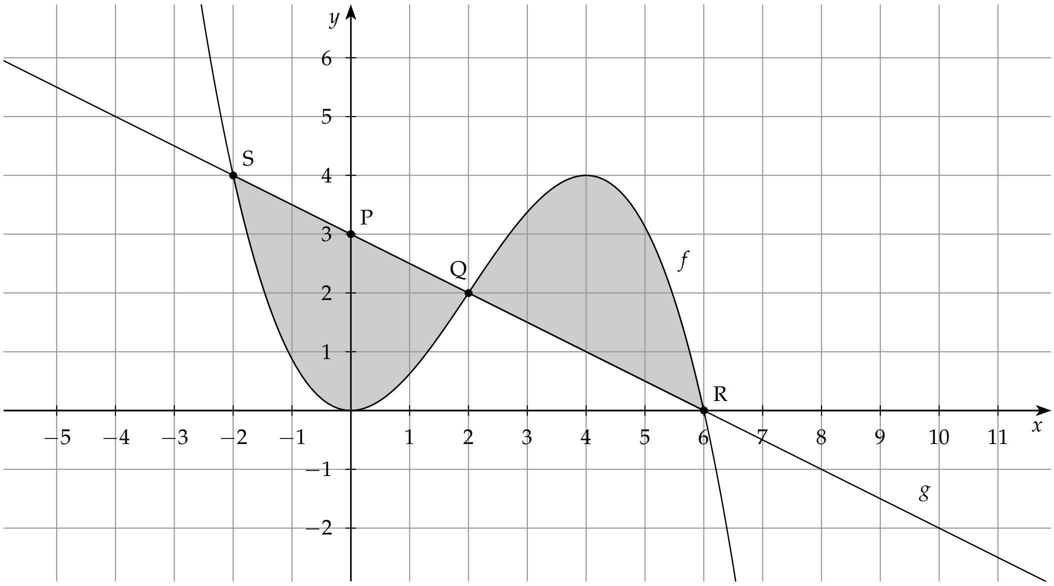
Gegeben ist eine Gerade g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, welche den Graphen der Funktion f in drei Punkten schneidet.

Vergleichst du den Funktionsterm von g mit der allgemeinen Geradengleichung $y = m \cdot x + c$, so kannst du die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c ablesen.

Den y-Achsenabschnitt kannst du direkt an der y-Achse einzeichnen.
Um einen weiteren Punkt zu erhalten gehst du um die Zahl im Nenner der Steigung in x-Richtung und um die Zahl im Zähler in y-Richtung.

► Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche bestimmen

Die Gerade g und der Graph der Funktion f umschließen gemeinsam eine Fläche die aus zwei Flächenstücken besteht:



Der gesamte Flächeninhalt A dieser grau markierten Fläche berechnet sich über die Addition der Flächeninhalte der beiden einzelnen Flächenstücke.

Diese Flächeninhalte kannst du wiederum über Integrale berechnen.
Um hierbei positive Flächeninhalte zu erhalten, ziehst du die Funktion, deren Graph unterhalb des Graphen der anderen Funktion liegt, von der darüber liegenden ab und integrierst schließlich über diese Differenz.
Beachte hierbei, dass bei der linken Fläche der Graph von g über dem Graphen von f liegt. Bei der rechten Fläche ist dies gerade umgekehrt.
Die Schnittpunkte der Graphen von f mit g $S(-2|4)$, $Q(2|2)$ und $R(6|0)$ bezeichnen die Integrationsgrenzen.

► Interpretieren der Gleichung

Berechnest du den gesamten Flächeninhalt auf einmal ohne den Betrag zu nutzen, so erhältst du folgende Rechnung:

$$A = \int_{-2}^{6} (\,f(x) - g(x)\,)\;\mathrm{d}x = 0$$

Wie du aus deiner obigen Berechnung schon folgern kannst, ist die Fläche zwischen den Funktionen nicht Null, sondern besteht aus zwei gleich großen Flächen.

c) **► Bestimmen der Gleichung der Ortslinie, auf der alle Wendepunkte liegen** (11P)

Laut Aufgabenstellung ist die folgende Funktionenschar f_k mit diesem Funktionsterm gegeben:

$$f_k(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3\cdot k}{8}x^2\,; \quad k > 0$$

Wie bereits in Teilaufgabe a) beschrieben, muss für Wendepunkte des Graphen von f_k an der zugehörigen Stelle die **notwendige Bedingung $f_k''(x) = 0$**, sowie die **hinreichende Bedingung $f_k'''(x) \neq 0$** gelten.
Solltest du Wendestellen finden, so erhältst du alle Wendepunkte in Abhängigkeit von k indem du diese Stellen in die Funktionenschar f_k einsetzt.

Die Gleichung der Ortslinie lässt sich schließlich dadurch bestimmen, dass eine Koordinate des Wendepunktes nach dem Parameter k aufgelöst wird und in die entsprechend andere Koordinate für k eingesetzt wird.
Du erhältst also schließlich eine Beziehung zwischen x und y, welche die Ortskurve darstellt.

► Untersuchen, ob die Aussage richtig ist

Laut Aufgabenstellung ist die Steigung der Ortslinie y im Wendepunkt W_k doppelt so groß wie die Steigung des Graphen der Funktionenschar f_k.

Da die ersten Ableitungen f_k' und y' der Funktionen die Steigung ihrer Graphen beschreiben, setzt du die x - Koordinate $x = k$ der Wendepunkte in die Funktionsterme dieser Ableitungen ein.
Damit die Aussage gültig ist, muss anschließend gelten:

$y'(k) = 2 \cdot f_k'(k)$

d) **► Aussage untersuchen** (9P)

Untersucht werden soll, ob eine Gerade durch den Ursprung und den Wendepunkt der Funktionenschar ebenfalls durch den Hochpunkt der Funktionenschar im 1. Quadranten verläuft.

Zuerst stellst du hierfür die Gleichung der Gerade durch den Ursprung und den Wendepunkt der Funktionenschar auf. Hierfür setzt du die Koordinaten des Wendepunktes in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ ein.
Anschließend berechnest du die Stelle, an der sich der Hochpunkt der Funktionenschar befindet. An diesen Stellen muss die **notwendige Bedingung $f_k'(x) = 0$** und die **hinreichende Bedingung $f_k''(x) \neq 0$** gelten.
Zum Schluss berechnest du noch die y - Koordinate des Hochpunktes und prüfst nach, ob dieser auf der Ursprungsgeraden liegt.