Aufgabe 1

a) ▶ Größtmöglichen Definitionsbereich bestimmen

In der ersten Aufgabe ist eine Funktionenschar gegeben, die durch die Gleichung

$$\boldsymbol{f_k(x) = \frac{10x-k}{x^2}}$$

dargestellt wird. Der Parameter k gehört zur Menge der rationalen Zahlen und ist echt größer als Null. Du sollst den Definitionsbereich und die Nullstellen angeben, verschiedene Grenzwerte berechnen, die Gleichungen aller Asymptoten aufstellen, sowie die Extrempunkte und deren Ortskurve bestimmen.

Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ gibt alle Werte an, für die die Funktion definiert ist, die man also in den Funktionsterm einsetzen darf.
Nicht definiert sind Funktionen dann, wenn...

- ...der Nenner der Funktion den Wert 0 annimmt.
- ...der Radikand unter einer Wurzel einen negativen Wert hat.
- ...das Argument einer log- oder ln-Funktion einen negativen Wert annimmt.

Ergibt der Nenner beim Einsetzen eines x-Wertes Null, hat er an dieser Stelle eine Definitionslücke, da man in keinem Fall durch Null teilen darf!
Der Nenner der gegebenen Funktion ist Null, wenn $x = 0$ gilt. Der Wert $x = 0$ darf also nicht in den Funktionsterm eingesetzt werden.

Daraus ergibt sich der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Du kannst den Definitionsbereich auch folgendermaßen schreiben: $\mathbb{D}\,\{x|x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\}$

▶ Nullstellen berechnen

Nullstellen sind die x-Werte, an denen $\boldsymbol{f(x) = 0}$ gilt. Um diese zu bestimmen, musst du den Funktionsterm mit Null gleichsetzen.
Bei der gegebenen Funktion handelt es sich um eine gebrochen rationale Funktion. Diese hat den Funktionswert Null, wenn der Zähler Null ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 & & \\ \frac{10x-k}{x^2} &= 0 & &\mid \cdot x^2 \\ 10x-k &= 0 & &\mid +k \\ 10x &= k & &\mid : 10 \\ x &= \frac{k}{10} & & \end{aligned}$$

An den Stellen $x = \frac{k}{10}$ befinden sich die Nullstellen der Funktionen f_k.

▶ Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ berechnen

Um die Grenzwerte der Funktion f_k zu bestimmen, muss die Funktion erst umformuliert werden:

$$\frac{10x-k}{x^2} = \frac{10x}{x^2} - \frac{k}{x^2} = \frac{10}{x} - \frac{k}{x^2}$$

Mit dieser umgeformten Funktionsgleichung kannst du nun den Grenzwert bestimmen:

Um zu bestimmen, welchen Wert die Funktion annimmt, wenn der eingesetzte x- Wert gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, setzt du gedanklich sehr große bzw. sehr kleine Beispielwerte ein.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f_k(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{10}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{k}{x^2}}_{\to 0} \\ &= 0\end{aligned}$$

Nimmt x unendlich große Werte an, wird der Nenner sehr groß, der Bruch dagegen sehr klein. Der Grenzwert beträgt folglich 0.

▶ Gleichung aller Asymptoten bestimmen

Gerade hast du gezeigt, dass die Funktion im Unendlichen gegen den Wert $y = 0$ strebt. Diese Gleichung entspricht der waagrechten Asymptote.

Die senkrechte Asymptote befindet sich an der Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist. Die Gleichung lautet also $x = 0$.

▶ Art und Lage der Extrempunkte berechnen

Um die Extrempunkte des Graphen von f_k zu bestimmen, musst du die Funktion f_k auf Minima bzw. Maxima untersuchen. Für diese sind die folgenden Kriterien zu erfüllen:

- Notwendige Bedingung: $\boldsymbol{f_k'(x) = 0}$
- Hinreichede Bedingung: $\boldsymbol{f_k''(x) > 0}$ für ein Minimum und $\boldsymbol{f_k''(x) < 0}$ für ein Maximum.

Hast du schließlich alle x-Werte bestimmt, für die ein Minimum bzw. Maximum vorliegt, so kannst du besagten x-Wert in den Term der Funktion f_k einsetzen und erhältst so die entsprechende y-Koordinate.

1. Schritt: Leite die Funktion nach x ab

Da die Funktion f eine gebrochen rationale Funktion ist, musst du die **Quotientenregel** verwenden, um f abzuleiten.

$$\begin{aligned}f_k'(x) &= \left[\frac{10x-k}{x^2}\right]' \\ &= \frac{x^2\cdot 10-(10x-k)\cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{10x^2-20x^2+2kx}{x^4} \\ &= \frac{x\cdot(10x-20x+2k)}{x\cdot(x^3)} \\ &= \frac{-10x+2k}{x^3} \\ &= \frac{2k-10x}{x^3}\end{aligned}$$

2. Schritt: Setze den Term der Ableitung mit Null gleich

Im Folgenden wollen wir überprüfen, für welche x die notwendig Bedingung $\boldsymbol{f_k'(x) = 0}$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 0 & & \\ \frac{2k-10x}{x^3} &= 0 & &\mid \cdot x^3 \\ 2k-10x &= 0 & &\mid +10x \\ 10x &= 2k & &\mid :10 \\ x &= \frac{1}{5}k & & \end{aligned}$$

Mögliche Minima bzw. Maxima befinden sich an der Stelle $x = \frac{k}{5}$.

3. Schritt: Zweite Ableitung auf Sattelpunkt überprüfen

Mit dem hinreichenden Kriterium $\boldsymbol{f_k''(x) \neq 0}$ überprüfst du, ob es sich wirklich um einen Extrempunkt handelt.
Gilt nämlich $f_k''(x) = 0$, so handelt es sich nicht um einen Hoch- oder Tiefpunkt, sondern um einen Sattelpunkt.

Die **zweite Ableitung** berechnest du folgendermaßen:

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= \left[\frac{2k-10x}{x^3}\right]' \\ &= \frac{-10x^3-(2k-10x)\cdot 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{-10x^3-6kx^2+30x^3}{x^6} \\ &= \frac{-10x-6k+30x}{x^4} \\ &= \frac{20x-6k}{x^4} \end{aligned}$$

Überprüfe nun die hinreichende Bedingung. Für $x = \frac{k}{5}$ gilt:

$$\begin{aligned} f_k''\left(\frac{k}{5}\right) &= \frac{20\cdot\frac{k}{5}-6k}{\left(\frac{k}{5}\right)^4} \\ &= (4k-6k)\cdot\frac{5^4}{k^4} \\ &= \frac{-2k\cdot 5^4}{k^4} \\ &= \frac{-1.250}{k^3} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Nun hast du gezeigt, dass es sich an der Stelle $\boldsymbol{x = \frac{k}{5}}$ um die Extrempunkte der Graphen und nicht um Sattelpunkte handelt.

4. Schritt: Bestimme die y-Koordinate des Extrempunkts

Die y-Koordinate bestimmst du durch Einsetzen des x-Wertes in den ursprünglichen Funktionsterm.

$$f_k\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{10\cdot\frac{k}{5} - k}{\left(\frac{k}{5}\right)^2}$$
$$= \frac{25}{k}$$

Die Extrempunkte der Funktionenschar besitzen die Koordinaten $\mathbf{E_k\left(\frac{k}{5}\middle|\frac{25}{k}\right)}$.

Ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt, findest du heraus, indem du den Funktionswert der zweiten Ableitung an der x-Koordinate des Extrempunktes betrachtest.

Es gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}}} \quad \boxed{\boldsymbol{f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}}}$$

Die zweite Ableitung und ihren Wert an der Stelle $x = \frac{k}{5}$ hast du bereits zuvor berechnet:

$f_k''(x) = \frac{20x-6k}{x^4}$

$f_k''\left(\frac{k}{5}\right) = \frac{-1250}{k^3}$

Laut Aufgabenstellung ist der Parameter k stets positiv. Da der Nenner k^3 daher immer positiv ist, gilt $\dfrac{-1250}{k^3} < 0$. Es handelt sich bei den Extrempunkten folglich um **Hochpunkte**.

▶ Ortskurve der Extrempunkte ermitteln

Die Koordinaten der Extrempunkte in Abhängigkeit von k hast du bereits ermittelt: $E_k\left(\frac{k}{5}\middle|\frac{25}{k}\right)$.
Für die x-Koordinate gilt also: $x_E = \frac{k}{5}$.
Formst du diese Gleichung nach k um, ergibt sich $\boldsymbol{k = 5x}$.
Diesen Wert von k musst du in die y-Koordinate der Hochpunkte einsetzen, um die Ortskurve zu bestimmen, auf der alle Hochpunkte der Funktionenschar liegen.

$$y_E = \frac{25}{k}$$
$$= \frac{25}{5x}$$
$$= \frac{5}{x}$$

Auf dem Graphen der Funktion y_E, der durch die Gleichung $y_E = \dfrac{5}{x}$ dargestellt werden kann, liegen alle Hochpunkte der Funktionenschar f_k.

b) ▶ **Gleichung der Wendetangente t_4 aufstellen**

Willst du die Tangente an einen Graphen an einer beliebigen Stelle x_0 bestimmen, verwendest du am Besten folgende Gleichung:

$$\boxed{\boldsymbol{y = t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}}$$

Hier stellt f die Funktion dar, an die die Tangente angelegt werden soll. x_0 gibt die Stelle an und x die Veränderliche.

Um die Tangente t_4 im Wendepunkt W_4 zu bestimmen, musst du die entsprechenden Werte einsetzen.
Da die Tangente an der Wendepunkt $W(\frac{3k}{10} \mid \frac{200}{9k})$ angelegt werden soll, muss hier $x_0 = \frac{3k}{10}$ gelten.

1. Schritt: x- und y-Koordinate x_4 und y_4 berechnen

Nun betrachten wir nur eine Funktion der Funktionenschar. Für diese gilt $k = 4$. Ihr Funktionsterm lautet damit:

$$\boldsymbol{f_4(x) = \frac{10x - 4}{x^2}}$$

In der Angabe sind die Koordinaten der Wendepunkte in Abhängigkeit von k gegeben. Setze auch hier den entsprechenden Wert für k ein und du erhältst die Koordinaten des Wendepunktes W_4.

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{3k}{10} \\ x_4 &= \frac{3 \cdot 4}{10} \\ &= \tfrac{6}{5} \end{aligned}$$

Für die y-Koordinate gilt das Gleiche:

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{200}{9k} \\ y_4 &= \frac{200}{9 \cdot 4} \\ &= \frac{50}{9} \end{aligned}$$

Du sollst nun nach der allgemeinen Tangentengleichung $y = t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(_0)$ die Wendetangente am gerade bestimmten Wendepunkt $W_4 = \left(\frac{6}{5} \mid \frac{50}{9}\right)$ bestimmen.

2. Schritt: Funktionswert $f'(x_0)$ berechnen

Die erste Ableitung der Funktion f in Abhängigkeit von k hast du bereits berechnet:

$$f_k'(x) = \frac{2k - 10x}{x^3}$$

Nun rechnest du nur noch mit einer Funktion aus der gesamten Schar. Für diese Funktion gilt $k = 4$ und damit für den Funktionsterm der ersten Ableitung:

$$f_4'(x) = \frac{8-10x}{x^3}$$

Durch Einsetzen von $\frac{6}{5}$ erhältst du den Funktionswert $f'(x_0)$.

$$\begin{aligned} f_4'(\tfrac{6}{5}) &= \frac{8-10\cdot\frac{6}{5}}{(\frac{6}{5})^3} \\ &= -\frac{125}{54} \end{aligned}$$

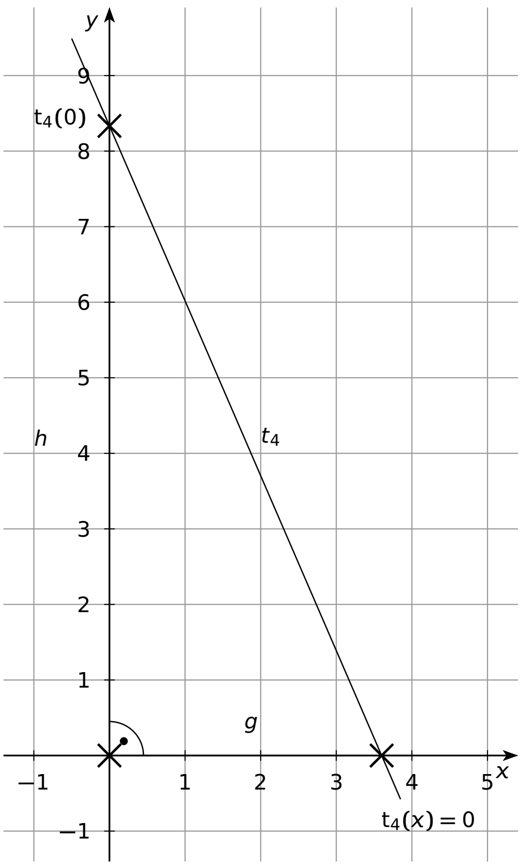
3. Schritt: Tangentengleichung aufstellen

Mit den bekannten Werten ergibt sich die Funktionsgleichung der Tangente:

$$\begin{aligned} t_4(x) &= f_4'(x_0)(x-x_0)+f_4(x_0) \\ &= -\tfrac{125}{54}(x-\tfrac{6}{5})+\tfrac{50}{9} \\ &= -\tfrac{125}{54}x+\tfrac{25}{9}+\tfrac{50}{9} \\ &= -\tfrac{125}{54}x+\tfrac{25}{3} \end{aligned}$$

Die Tangente $t_4 = -\frac{125}{54}x + \frac{25}{3}$ verläuft durch den Wendepunkt W_4.

▶ Maßzahl des Flächeninhalts berechnen.



Wie du an dieser Skizze erkennen kannst, handelt es sich um ein **rechtwinkliges Dreieck**.
Den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks berechnet man nach folgender Formel:

$$\boldsymbol{A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h}$$

Hast du die Länge der beiden Seiten berechnet, kannst du den gesamten Flächeninhalt nach dieser Formel bestimmen.

1. Schritt: Länge der Grundseite g ermitteln

Um die Länge der Grundseite zu ermitteln, musst du den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ermitteln. Der Abstand zwischen dem Ursprung und diesem Schnittpunkt entspricht der gesuchten Länge. Um die Nullstelle also zu ermitteln, kannst du die Gleichung der Tangenten t_4 mit Null gleichsetzen und den passenden Wert für x bestimmen:

$$\begin{aligned} t_4(x) &= 0 \\ -\tfrac{125}{54}x + \tfrac{25}{3} &= 0 \qquad \mid -\tfrac{25}{3} \mid \cdot(-1) \\ \tfrac{125}{54}x &= \tfrac{25}{3} \qquad \mid : \tfrac{125}{54} \\ x &= \tfrac{18}{5} \\ &= 3,6 \end{aligned}$$

Die Grundlinie hat also eine Länge von $3,6$ LE.

2. Schritt: Länge der Höhe *h* berechnen

Die Höhe des Dreiecks berechnest du auf die gleiche Weise. Allerdings interessiert uns hier der Abstand des Schnittpunkts der Tangente mit der y-Achse vom Ursprung.

$$\begin{aligned} y &= t_4(0) \\ y &= -\tfrac{125}{54} \cdot 0 + \tfrac{25}{3} \\ &= \tfrac{25}{3} \\ &= 8,34 \end{aligned}$$

Das Dreieck ist etwa $8,34$ LE hoch.

3. Schritt: Maßzahl des Flächeninhalts berechnen

Nach der oben genannten Form und den gerade bestimmten Längen von Höhe und Grundseite kannst du den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen. Da keine Einheiten gegeben sind, sollst du lediglich die Maßzahl des Flächeninhalts angeben.

$$\begin{aligned} A_\Delta &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 8,34 \\ &= 15,0 \end{aligned}$$

Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von etwa 15 cm^2.

c) ▸ Zusammenhang zwischen Abbildung und G_4 begründen

In diesem Aufgabenteil sollst du begründen, warum der Graph, der auf der Abbildung dargestellt ist, zur Funktion f_4 gehört.
Dies kannst du zum Beispiel über die Nullstellen der Funktion f_4 und der Wendetangente t_4 begründen: Berechne die Schnittpunkte der beiden Graphen mit der x-Achse und vergleiche dein Ergebnis mit der erhaltenden Skizze.

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= 0 \\
\frac{10x-4}{x^2} &= 0 && \mid \cdot x^2 \\
10x-4 &= 0 && \mid +4 \\
10x &= 4 && \mid 10 \\
x &= 0,4
\end{aligned}$$

Schaust du dir nun den Graphen in der Abbildung an, siehst du, dass er genau an der Stelle $x = 0,4$ eine Nullstelle hat.

Du kannst weiterhin erkennen, dass die eingezeichnete Tangente einen y-Achsenabschnitt von $\frac{25}{3}$ besitzt und die x-Achse an der Stelle $x = 3,6$ schneidet. Ebenfalls wurde die Tangente im Wendepunkt an der Stelle $x = 1,2 = \frac{6}{5}$ angelegt. Diese Eigenschaften treffen ebenfalls auf die Funktion f_4 zu.

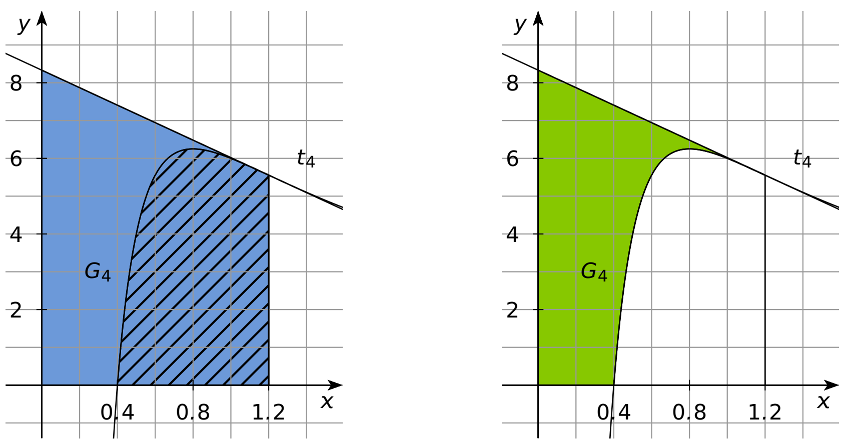
Es handelt sich also um den Graphen der Funktion f_4.

▸ Fläche kennzeichnen und beschreiben

Nun sollst du den Flächeninhalt A_1, der durch die Gleichung

$$A_1 = \int_0^{1,2} t_4(x)\mathrm{d}x - \int_{0,4}^{1,2} f_4(x)\mathrm{d}x$$

berechnet werden kann, beschreiben und im angefügten Arbeitsblatt kennzeichnen.
Überlege dir dazu, welche Flächen die Integrale jeweils veranschaulichen.



Das Integral $\int_0^{1,2} t_4(x)\mathrm{d}x$ beschreibt die blaue Fläche zwischen der Tangente t_4 und der x-Achse innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 1,2$.

Das Integral $\int_{0,4}^{1,2} f_4(x)\mathrm{d}x$ veranschaulicht die schwarz schraffierte Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f_4 und der x-Achse zwischen den Grenzen $x = 0,4$ und $x = 1,2$. Wird diese schwarz schraffierte Fläche von der blauen subtrahiert, erhält man die grüne Fläche A_1.

▶ Beweisen, dass Flächeninhalte übereinstimmen

Um zu beweisen, dass $A_1 = A_2$ gilt, kannst du für A_2 folgende Eigenschaften verwenden:

$$\boxed{\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x}$$

Wir können also folgende Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^{0,4} t_4(x)\mathrm{d}x + \int_{0,4}^{1,2} t_4(x) - f_4(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{0,4} t_4(x)\mathrm{d}x + \int_{0,4}^{1,2} t_4(x)\mathrm{d}x - \int_{0,4}^{1,2} f_4(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{1,2} t_4(x)\mathrm{d}x - \int_{0,4}^{1,2} f_4(x)\mathrm{d}x \\ &= A_1 \end{aligned}$$

Damit hast du gezeigt, dass die Flächeninhalte bzw. Integrale übereinstimmen.