

In einem Labor wird ein (Probe-)Körper auf $100\text{ }^\circ\text{C}$ erhitzt und anschließend bei konstanter Raumtemperatur von $20\text{ }^\circ\text{C}$ abgekühlt. Seine Temperatur während des Abkühlens wird durch die Funktion T mit der Gleichung:

$$T(t) = 20 + 80 \cdot e^{-0,01 \cdot t}, \quad t \geq 0,$$

beschrieben (t in Sekunden, $T(t)$ in $^\circ\text{C}$). Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion T .

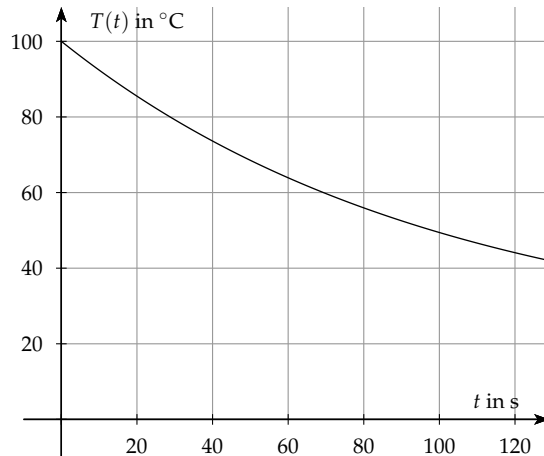


Abbildung 1

- a) (1) Beschreiben Sie den Verlauf des in Abbildung 1 dargestellten Funktionsgraphen von T im Sachzusammenhang. (10P)
- (2) Berechnen Sie die Temperatur, auf die der Körper nach der Zeit $t = 120\text{ s}$ abgekühlt ist.
- (3) Prüfen Sie die Entwicklung der Temperatur des Körpers für große t .

- b) Durch $\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t) dt$ ist die mittlere Temperatur des Körpers innerhalb eines (10P)

Zeitintervalls $[t_1; t_2], 0 \leq t_1 \leq t_2$, gegeben.

- (1) Weisen Sie nach, dass die mittlere Temperatur des Körpers im Zeitintervall $[t_1, t_2]$,

$0 \leq t_1 < t_2$, durch $\frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot (20 \cdot (t_2 - t_1) - 8000 \cdot (e^{-0,01 \cdot t_2} - e^{-0,01 \cdot t_1}))$ berechnet werden kann.

- (2) Berechnen Sie die mittlere Temperatur des Körpers innerhalb der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.

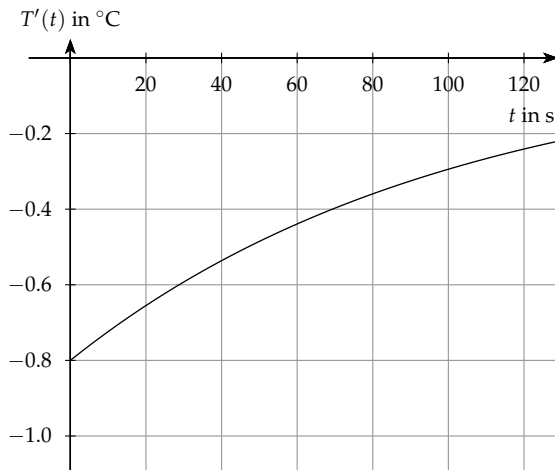


Abbildung 2

- c) Die Abbildung 2 zeigt den Graphen der Abkühlungsgeschwindigkeit T' des Körpers. Es gilt $T'(t) = -0.8 \cdot e^{-0.01 \cdot t}$, $t \geq 0$. (18P)
- (1) Begründen Sie qualitativ die Eigenschaften des Funktionsgraphen von T in Abbildung 1 mit den Eigenschaften des in Abbildung 2 dargestellten Graphen der Funktion T' .
 - (2) Geben Sie an und begründen Sie, zu welchem Zeitpunkt des Zeitintervalls $[0;120]$ der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit maximal ist.
 - (3) Der Graph der Funktion T' und die t -Achse schließen im Intervall $[0; 120]$ ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstücks und interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im Sachzusammenhang.
 - (4) Ermitteln Sie die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.
- d) (1) Bestimmen Sie die **mittlere Änderungsrate** der Abkühlungsgeschwindigkeit T' des Körpers während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs. (12P)
[Zur Kontrolle: Der gesuchte Wert ist ungefähr $0,00466^\circ\text{C}/\text{s}^2$]
- (2) Ermitteln Sie den Zeitpunkt des Abkühlungsvorgangs, zu dem die **momentane Änderungsrate** der Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers den Wert der mittleren Änderungsrate seiner Abkühlungsgeschwindigkeit aus (1) hat.