1. (1) ► **Zeigen, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist**

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei Dreiecksseiten die gleiche Länge besitzen und diese im gleichen Winkel auf der Basis des Dreiecks stehen. Um hier zu zeigen, dass ABC gleichschenklig ist, musst du also folgendes beweisen:

- 1. Schritt: Zeigen, dass es zwei Dreiecksseiten mit gleicher Länge gibt.
- 2. Schritt: Zeigen, dass diese Dreiecksseiten im gleichen Winkel auf der Basis des Dreiecks stehen.

1. Schritt:

Berechne die Längen der Dreiecksseiten über den Betrag der zugehörigen Vektoren zwischen A, B und C:

- $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2+3^2+0^2} = \sqrt{10} = 3{,}16\,\text{LE}$
- $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+2^2+0^2} = \sqrt{8} = 2{,}83\,\text{LE}$
- $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{10} = 3{,}16\,\text{LE}$

Damit hast du gezeigt, dass das Dreieck ABC zwei Seiten mit gleicher Länge besitzt ($\overline{AB}$ und $\overline{BC}$). Die Seite $\overline{AC}$ bildet die Basis von ABC.

2. Schritt:

Zeige nun, dass $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ im gleichen Winkel auf der Basis des Dreiecks ABC, der Seite $\overline{AC}$, stehen. Verwende dazu die Formel zur Berechnung der Winkel zwischen Vektoren:

Winkel α zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{-1\cdot2+3\cdot2+0\cdot0}{\sqrt{(-1)^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}}$$

$$\cos\alpha = 0{,}447 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \approx 63{,}44\,^\circ$$

Winkel β zwischen $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$:

$$\cos\beta = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{3\cdot 2+(-1)\cdot 2+0\cdot 0}{\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}}$$

$$\cos\beta = 0,447 \;\Leftrightarrow\; \beta \approx 63,44\,^\circ$$

Da $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ die gleiche Länge haben und im gleichen Winkel auf $\overline{AC}$ stehen, wurde gezeigt, dass es sich bei ABC um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.

(2) ► **Berechnen der Koordinaten von D so, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist**

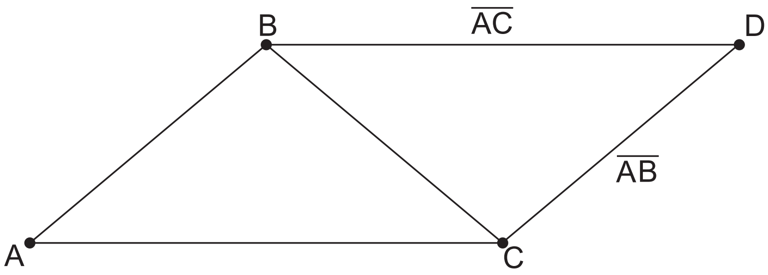
Bevor du damit beginnst, diese Aufgabe zu lösen, solltest du dir die Eigenschaften eines Parallelogramms vor Augen führen.

- In einem Parallelogramm sind jeweils die gegenüberliegenden Seiten gleichlang und gleichzeitig parallel.

Willst du nun die Koordinaten von D so bestimmen, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, könntest du so vorgehen:

- 1. Schritt: Bilden des Richtungsvektors Richtungsvektor $\overrightarrow{AC}$
- 2. Schritt: Berechne: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$

Skizze:



1. Schritt:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2-0\\2-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

2. Schritt:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$$

Damit $ABCD$ ein Parallelogramm bildet, muss D folgende Koordinaten haben:
$D(1\mid 5\mid 0)$.

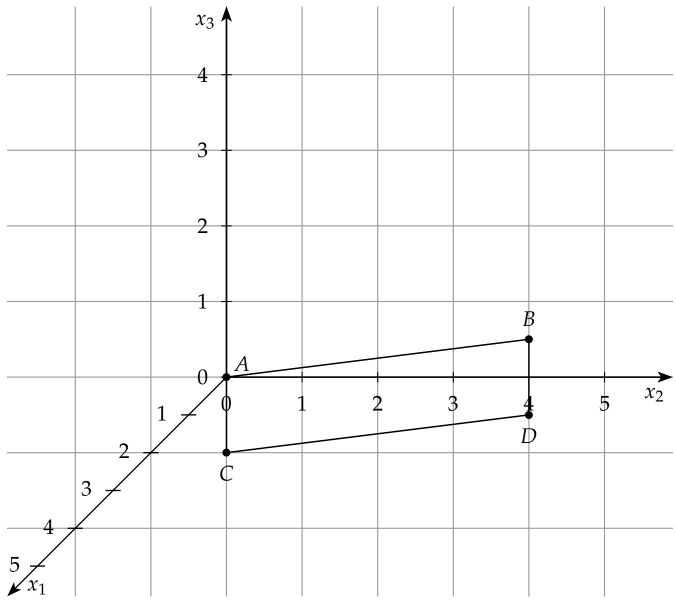
(3) ▶ **Begründen, warum das Parallelogramm $ABCD$ in der x_1x_2 - Ebene liegt**

Die Koordinaten der Eckpunkte des Parallelograms $ABCD$ sind:

- $A(0 \mid 0 \mid 0)$
- $B(-1 \mid 3 \mid 0)$
- $C(2 \mid 2 \mid 0)$
- $D(1 \mid 5 \mid 0)$

Betrachtest du die Koordinaten der Eckpunkte des Parallelogramm, so kannst du erkennen, dass die x_3 - Koordinate aller Eckpunkte gleich Null ist. Daraus folgt, dass das Parallelogramm $ABCD$ in der x_1x_2 - Ebene liegt. Einen Blick auf die Koordinatenform der x_1x_2 - Ebene unterstreicht die Begründung:
Koordinatenform der x_1x_2 - Ebene: $x_3 = 0$.

(4) ▶ **Darstellen des Parallelogramm $ABCD$ in einem geeigneten Koordinatensystem**



2. (1) ▶ **Bestimmen der Koordinaten von F**

Die Koordinaten von Punkt F berechnest du, indem du Gerade g und Ebene E schneidest. Gehe dabei so vor:

- 1. Schritt: Umformen der Geraden g zu einem Vektor
- 2. Schritt: Einsetzen des Vektors der Geraden g in Koordinatenform von E
- 3. Schritt: Einsetzen des berechneten r in Gleichung von g zum Bestimmen der Koordinaten von F

1. Schritt:

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-r \\ r \\ 1+r \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

$E: \quad x_3 = 4$

$1 + r = 4 \;\Leftrightarrow\; r = 3$

3. Schritt:

Koordinaten von F:

$$\overrightarrow{x_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind: $F(-1 \mid 3 \mid 4)$.

(2) ▶ **Vervollständigen des Parallelogramm $ABCD$ zum Prisma**

Bevor du das Parallelogramm erweiterst, empfiehlt es sich zuerst die Koordinaten der Punkte E, G und H zu bestimmen.

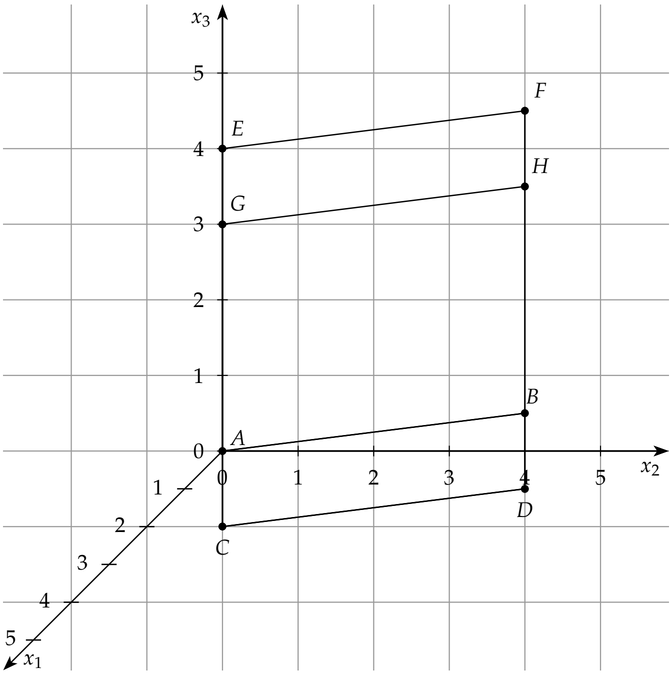
Die x_1 - und x_2 - Koordinaten des Punktes E stimmen mit den x_1 - und x_2 - Koordinaten von A überein. Punkt E besitzt darüber hinaus die gleiche x_3 - Koordinate wie Punkt F.

$\Longrightarrow E(0 \mid 0 \mid 4)$

Analoges Vorgehen bei den Punkten G und H:

$\Longrightarrow G(2 \mid 2 \mid 4); H(1 \mid 5 \mid 4)$.

Vervollständigtes Prisma:



(3) ▶ **Ermitteln einer Gleichung der Ebene E_2**

Die allgemeine Form einer Ebene in Koordinatenform sieht wie folgt aus:
$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$.
Wobei n_1, n_2 und n_3 den Einträgen des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ der Ebene E_2 entsprechen. d ergibt sich durch Einsetzen eines Punktes, welcher in der Ebene E_2 liegt. Gehe beim Bestimmen der Ebenengleichung von E_2 in Koordinatenform schrittweise vor:

- 1. Schritt: Bestimmen des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, z.B $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AF}$.
- 2. Schritt: Ermitteln von d durch Einsetzen eines Punktes, welcher sicher in Ebene E_2 liegt, in die Koordinatenform.

1. Schritt:
Kreuzprodukt der Richtungsvektoren:
$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 0-8 \\ 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$\Longrightarrow E: \; 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = d$

2. Schritt:
Einsetzen von A in die Ebenengleichung der Ebene E_2 in Koordinatenform:
$1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = d \;\Leftrightarrow\; d = 0$

Eine Gleichung der Ebene E_2 in Koordinatenform ist:
$x_1 - x_2 + x_3 = 0$

(4) ▶ **Berechnen des Winkels, unter dem E_2 die Ebene E schneidet**

Den Winkel, unter welchem E_2 die Ebene E schneidet, berechnest du, indem du den Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen berechnest. Die Normalenvektoren der Ebenen ergeben sich aus jeweiligen Koordinatengleichungen. Diese sind:

- Ebene E: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Ebene E_2: $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechne den Winkel zwischen $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{n_2}$ über die Formel zur Berechnung der Winkel zwischen zwei Vektoren.

Berechnung des Winkels zwischen $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{n_2}$:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n}\circ\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0\cdot 1+0\cdot(-1)+1\cdot 1}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{3}}$$

$\cos\alpha = 0{,}577 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 54{,}73\,^\circ$

Der Winkel, unter welchem sich E und E_2 schneiden, ist 54,73 °.

3. ▶ **Erklären der Rechnung und Interpretation des Ergebnis im Sachzusammenhang**

Im Folgenden wird die Rechnung zeilenweise erklärt:

1. Zeile:

Im ersten Schritt der Rechnung wird der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ berechnet.
Dieser ergibt sich zu:
$M(1 \mid 1 \mid 0)$.

2. Zeile:

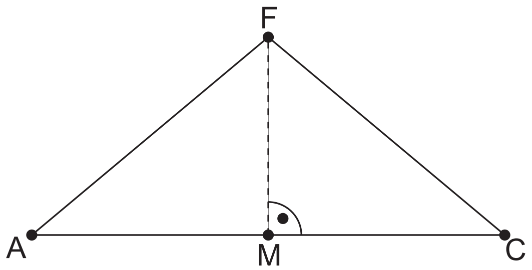
Im zweiten Schritt wird der Vektor zwischen dem eben bestimmten Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$ und dem Punkt F berechnet.

Dieser Vektor ist: $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$.

3. Zeile:

In der dritten Zeile wird das Skalarprodukt zwischen dem in der zweiten Zeile bestimmten Vektor $\overrightarrow{MF}$ und dem zur Strecke $\overline{AC}$ zugehörigem Vektor $\overrightarrow{AC}$ gebildet. Dieses Vektorprodukt ergibt sich zu Null, was bedeutet, dass der Vektor $\overrightarrow{MF}$ bzw. die Strecke $\overline{MF}$ senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{AC}$ bzw. der Strecke $\overline{AC}$ steht.

Betrachtet man das Dreieck ACF, so kann man erkennen, dass die Strecke $\overline{MF}$ die zur Grundseite $\overline{AC}$ zugehörige Höhe ist:



4. Zeile:

Der Flächeninhalt A eines Dreiecks berechnet sich wie folgt:
$A = \frac{1}{2}\cdot\text{Grundseite}\cdot\text{zugehörige Höhe}$.

Wie oben erwähnt, ist die Strecke $\overline{AC}$ Grundseite des Dreiecks und $\overline{MF}$ dessen zugehörige Höhe. Durch Berechnung des Beträge der zugehörigen Richtungsvektoren zu $\overline{AC}$ und $\overline{MF}$ und Einsetzen der resultierenden Längen in die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks, wird hier der Flächeninhalt des Dreieck ACF berechnet.
Dieser ergibt sich zu $4 \cdot \sqrt{3}$.