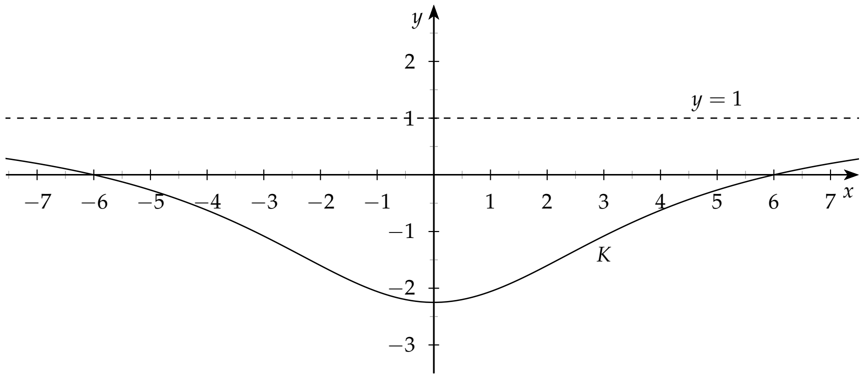
Aufgabe I 1

a) **Zeichnung des Schaubilds K von f** (7VP)

Das Schaubild der Funktion f ergibt sich mithilfe des GTR, indem entweder das Schaubild direkt gezeichnet oder eine Wertetabelle erstellt wird:



Untersuchung des Verhaltens von K für $|x| \to \infty$

Bei der Funktion f handelt es sich um eine gebrochenrationale Funktion, wobei der **Zählergrad gleich dem Nennergrad** ist. Somit gilt:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^2-36}{x^2+16} = 1.$$

Somit ist auch die Gerade $y = 1$ die **waagrechte Asymptote** von K.

Nachweis, dass K genau zwei Wendepunkte besitzt

Das Schaubild K hat genau dann zwei Wendepunkte, wenn die zweite Ableitung von f nur genau zwei Nullstellen besitzt und dort auch ihr Vorzeichen wechselt. Dieser Nachweis muss handschriftlich durchgeführt werden und ist **nicht** mit dem GTR durchführbar!

Für die erste Ableitung von f ergibt sich nach der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\cdot(x^2+16)-(x^2-36)\cdot 2x}{(x^2+16)^2} \\ &= \frac{2x^3+32x-2x^3+72x}{(x^2+16)^2} \\ &= \frac{104x}{(x^2+16)^2} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ergibt sich wiederum aus der Quotienten- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{104\cdot(x^2+16)^2-104x\cdot 2(x^2+16)^1\cdot 2x}{(x^2+16)^4} \\ &= \frac{(x^2+16)\cdot\left[104\cdot(x^2+16)-104x\cdot 2\cdot 2x\right]}{(x^2+16)^4} \\ &= \frac{104(x^2+16)-104\cdot 4x^2}{(x^2+16)^3} = \frac{104(x^2+16-4x^2)}{(x^2+16)^3} = \frac{104(16-3x^2)}{(x^2+16)^3} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für Wendepunkte lautet $f''(x) = 0$. Der Bruchterm von f'' nimmt dabei genau dann den Wert Null an, wenn sein **Zähler** den Wert Null annimmt:

$$\begin{aligned} f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 104(16-3x^2)&=0\\ 16-3x^2&=0\\ 3x^2&=16\\ x^2&=\frac{16}{3}\\ x_{1/2}&=\pm\sqrt{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

f'' hat also genau zwei Nullstellen. Ihr Vorzeichen wird dabei allein vom Ausdruck $16-3x^2$ im Zähler bestimmt, da sowohl der Nenner als auch der Faktor 104 im Zähler **stets positiv** sind.

Da eine quadratische Funktion g mit $g(x)=16-3x^2$ an ihren Nullstellen **immer** ihr Vorzeichen wechselt, ist dies auch für f'' dort der Fall.

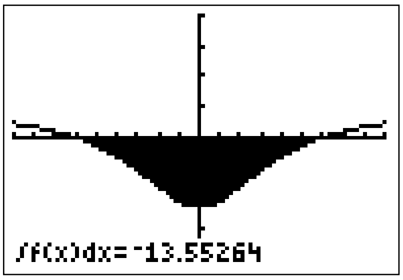
Das Schaubild K besitzt somit genau zwei Wendepunkte.

b) **Berechnung des Wasservolumens, wenn der Kanal vollständig gefüllt ist** (5VP)

Das Wasservolumen kann berechnet werden, indem zunächst der Inhalt der Querschnittsfläche des Kanals berechnet und anschließend mit der Kanallänge von 500 m multipliziert wird.

Das Schaubild stellt den Querschnitt des Kanals laut Aufgabentext für $-6 \leq x \leq 6$ dar. Der Flächeninhalt A_1 kann somit über das **Integral** über $f(x)\,dx$ von -6 bis 6 berechnet werden.

Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow 7\text{: } \int f(x)\,dx}$ lässt sich das Integral berechnen, es beträgt etwa $-13,55$. Da eine Fläche allerdings nie negativ sein kann, ergibt sich:



$$A_1 = \left| \int_{-6}^{6} f(x)\,dx \right| \approx 13,55.$$

Für das Volumen V des Kanals ergibt sich damit:

$$V = A_1 \cdot 500 \approx 13,55 \cdot 500 = 6775.$$

Wenn der Kanal vollständig gefüllt ist, fasst er etwa 6775 m^3 Wasser.

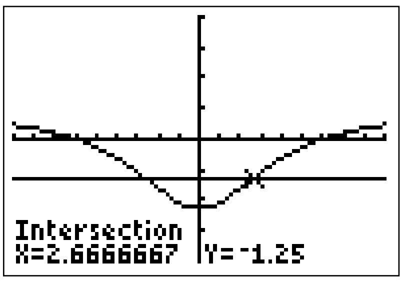
Füllvolumen bei einem Pegelstand von 1,00 m

Da der Pegelstand in Bezug auf den tiefsten Punkt gemessen wird, wird zweckmäßigerweise zunächst dieser Tiefpunkt von K berechnet.

Seine Koordinaten können über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow 3\text{: minimum}}$ mit dem GTR bestimmt werden, sie lauten $T(0 \mid -2,25)$.

Bei einem Pegelstand von $1,00$ m (über diesem tiefsten Punkt) liegt die Wasseroberfläche im Querschnitt also auf der Geraden $y=-1,25$.

Die beiden Schnittstellen von K und der Geraden $y = -1,25$ ergeben sich mit dem GTR über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow 5\text{: intersect}}$. Sie lauten $x_1 \approx -2,67$ und $x_2 \approx 2,67$.



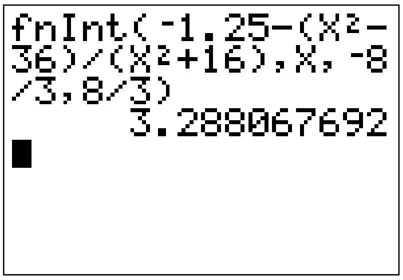
Die Schnittstellen können alternativ auch schnell von Hand berechnet werden:

Handschriftliche Lösung

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-36}{x^2+16} &= -1,25 = -\frac{5}{4} \\
x^2-36 &= -\frac{5}{4}(x^2+16) \\
x^2-36 &= -\frac{5}{4}x^2-20 \\
\frac{9}{4}x^2 &= 16 \\
x^2 &= \frac{64}{9} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{64}{9}} = \pm\frac{8}{3} \approx \pm 2,67
\end{aligned}
$$

Die neue Querschnittsfläche A_2 des Wassers im Kanal entspricht der Schnittfläche zwischen K und der Geraden $y=-1,25$ zwischen den beiden Schnittstellen:

$$A_2 = \int_{-\frac{8}{3}}^{\frac{8}{3}} (-1,25 - f(x))\,dx \approx 3,29$$



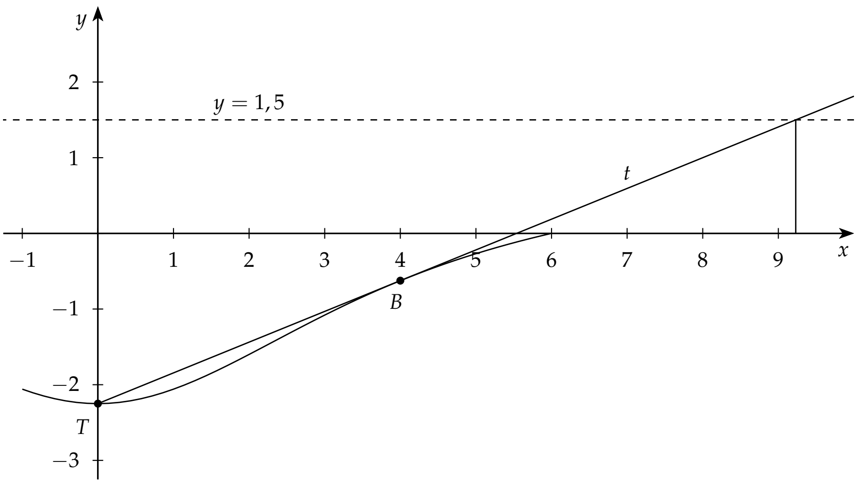
Das Integral kann dabei mit dem GTR über $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ berechnet werden.
Der Anteil, zu dem der Kanal nun gefüllt ist, kann nun einfach berechnet werden, indem die beiden **Querschnittsflächen** verglichen werden. Die Länge des Kanals ändert sich nämlich nicht, der Unterschied der beiden Querschnittsflächen entspricht daher auch dem Unterschied der beiden Volumina:

$$p\% = \frac{A_2}{A_1}\cdot 100\% = \frac{3,29}{13,55}\cdot 100\% \approx 0,243\cdot 100\% = 24,3\%.$$

Bei einem Pegelstand von 1,00 m ist der Kanal zu etwa 24% gefüllt.

c) **Berechnung der maximalen Entfernung vom Kanalrand** (6VP)

Wenn die Person möglichst weit weg vom Kanalrand steht und gerade noch den tiefsten Punkt des Kanals sehen kann, dann wird ihr Sehstrahl durch die **Tangente** an das Schaubild K beschrieben, die durch den Tiefpunkt T verläuft.



Die Tangente liegt an K in einem noch unbekannten Berührpunkt $B(x_0 \mid f(x_0))$ mit einer positiven Berührstelle x_0. Sie hat die Gleichung:

$$t\colon y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$y = \frac{104x_0}{(x_0^2+16)^2}(x-x_0)+\frac{x_0^2-36}{x_0^2+16}$$

Die Tangente soll weiterhin durch den Tiefpunkt $T(0 \mid -2,25)$ von K verlaufen. Seine Koordinaten können daher in der Tangentengleichung für x bzw. y eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
-2,25 = -\frac{9}{4} &= \frac{104x_0}{(x_0^2+16)^2}(0-x_0)+\frac{x_0^2-36}{x_0^2+16} \\
-\frac{9}{4} &= \frac{-104x_0^2}{(x_0^2+16)^2}+\frac{x_0^2-36}{x_0^2+16} && \mid \cdot (x_0^2+16)^2 \\
-\frac{9}{4}\cdot(x_0^2+16)^2 &= -104x_0^2+(x_0^2-36)\cdot(x_0^2+16) && \mid \text{ausmultiplizieren} \\
-\frac{9}{4}x_0^4-72x_0^2-576 &= -104x_0^2+x_0^4-20x_0^2-576 \\
-\frac{13}{4}x_0^4+52x_0^2 &= 0 \\
x_0^4-16x_0^2 &= 0 && \mid x_0^2 \text{ ausklammern} \\
x_0^2\cdot(x_0^2-16) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_{0/1}=0 \\
x_0^2-16 &= 0 \\
x_{0/2} = 4;\ x_{0/3} &= -4
\end{aligned}$$

(Hinweis: Alternativ kann die Gleichung oben auch mit dem GTR gelöst werden.)

Da die Berührstelle x_0 positiv sein soll, kommt nur die zweite Lösung in Frage, es ist $x_0 = 4$. Die Tangente hat somit die Gleichung:

$$t\colon y = \frac{104\cdot 4}{(4^2+16)^2}(x-4)+\frac{4^2-36}{4^2+16} \approx 0,4063x-2,25.$$

Nun fehlt noch diejenige Stelle x, an der $y = 1,5$ ist:

$$\begin{aligned}
1,5 &= 0,4063x-2,25 \\
0,4063x &= 3,75 \\
x &= \frac{3,75}{0,4063} \approx 9,23
\end{aligned}$$

Da sich der Kanalrand an der Stelle $x = 6$ liegt, gilt:

Die Person darf höchstens $9,23-6 = 3,23$ m vom Kanalrand entfernt stehen, um den tiefsten Punkt gerade noch sehen zu können.