a) (1) ► **Berechnen der durchschnittlichen Haushaltsgröße** (6 BE)

In der Tabelle der Aufgabenstellung sind zu den verschiedenen Haushaltsgrößen jeweils die relativen Anteile dieser, an der Gesamtverteilung der Haushalte angegeben. Willst du nun die mittlere Haushaltsgröße berechnen, so berechnest du das arithmetische Mittel $\overline{x}$ der Haushaltsgrößen. Das arithmetische Mittel berechnest du hier, indem du die Anzahl der Personen pro Haushalt mit ihrem relativen Anteil multiplizierst und die berechneten Zahlen anschließend aufsummierst:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{5} h_i(x_i) \cdot x_i = 0,1 \cdot 1 + 0,4 \cdot 2 + 0,25 \cdot 3 + 0,15 \cdot 4 + 0,1 \cdot 5 = 2,75$$

Die durchschnittliche Haushaltsgröße beträgt also 2,75.

(2) ► **Berechnen der Einwohnerzahl**

Da dir nun bekannt ist, das in jedem Haushalt durchschnittlich 2,75 Menschen leben, berechnest du die Einwohnerzahl von Magrebinien indem du die durchschnittliche Anzahl der Menschen pro Haushalt mit der Anzahl der Haushalte multiplizierst:

$$\text{Einwohnerzahl} = 2,75 \cdot 2.000.000 = 5.500.000$$

Magrebinien besitzt also insgesamt 5.500.000 Einwohner.

b1) ► **Erklären der Bedeutung der Rechnung**

Über den gegebenen Term berechnet man die Wahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsvariablen. Sind Zufallsvariablen binomialverteilt, so können diese nur zwei verschiedene Merkmalsausprägungen annehmen, die Wahrscheinlichkeit für diese Ausprägungen sind konstant, da es sich um Ziehen mit Zurücklegen handelt. Das bedeutet auch, dass die Grundgesamtheit die gleiche bleibt und die Zufallsexperimente damit unabhängig voneinander sind.

Die Grundform des Terms ist:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist k eine Merkmalsausprägung der Zufallsvariablen X, zu dieser Merkmalsausprägung soll die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ berechnet werden. n ist die Grundgesamtheit und p ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von k.

Wird der gegebene Term betrachtet, so gilt:
$k = 2$; $n = 5$ und $p = 0,25$.

Untersuchst du die gegebene Tabelle näher, so kannst du erkennen, dass die Haushalte mit 3 Personen einen relativen Anteil von $0,25$ an der gesamten Verteilung der Haushalte besitzen. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufällig ausgewählten Haushalt 3 Personen leben ist 0,25 und die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufällig ausgewählten Haushalt mehr oder weniger als 3 Personen leben, ist 0,75.

Über den gegebenen Term wird also die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass bei 5 zufällig ausgewählten Haushalten in genau 2 dieser Haushalte 3 Personen leben. Es gilt also:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot (0,25)^2 \cdot (1-0,25)^{5-2} = \binom{5}{2} \cdot (0,25)^2 \cdot (0,75)^3.$$

b2) ► **Berechnen der Wahrscheinlichkeit** (6 BE)

Die Haushalte mit 2 Personen haben einen relativen Anteil von $0,4$ an der gesamten Verteilung der Haushalte. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit das ein zufällig ausgewählter Haushalt ein Haushalt mit 2 Personen ist, liegt bei 0,4 und die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei diesem Haushalt um einen Haushalt mit mehr oder weniger als 2 Personen handelt, ist 0,6.

Es liegt also wie im Aufgabenteil zuvor eine binomialverteilte Zufallsvariable X vor. Diese Zufallsvariable beschreibt die Anzahl der 2 - Personen - Haushalte unter den 5 zufällig ausgewählten. Die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Merkmalsausprägungen von X, berechnet sich ebenfalls über den im Aufgabenteil b1 beschriebenen Term.

Gesucht ist hier die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 5 zufällig ausgewählten Haushalten, mindestens ein Haushalt mit 2 Personen befindet ($P(X \geq 1)$). Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P(X \geq 1)$ berechnest du wie folgt über dessen Gegenereignis.
Das Gegenereignis ist: In keinem der zufällig ausgewählten Haushalte wohnen 2 Personen, also $P(X = 0)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$P(X \geq 1) = 1 - \left(\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}\right)$$

Mit $n = 5$, da 5 Haushalte zufällig ausgewählt werden sollen; $k = 0$, da keiner der ausgewählten Haushalte ein 2 Personen Haushalt sein soll (Gegenereignis) und $p = 0,4$, da die Wahrscheinlichkeit für ein 2 - Personen - Haushalt 0,4 ist.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$P(X \geq 1) = 1 - \left(\binom{5}{0} \cdot 0,4^0 \cdot (1-0,6)^{5-0}\right)$$
$$P(X \geq 1) = 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot (0,6)^5\right)$$
$$P(X \geq 1) = 0,9222$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einem der zufällig ausgewählten Haushalte 2 Personen leben, ist 92,22 %.

c1) (1) ► **Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 40 Zwei - Personen Haushalte ausgewählt werden** (10 BE)

Es werden insgesamt 100 Haushalte zufällig ausgewählt. Deine Aufgabe ist es hier zu bestimmen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass mehr als 40 dieser Haushalte 2 - Personen - Haushalte sind. Das heißt die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der 2 - Personen - Haushalte in der Grundgesamtheit von 100 zufällig ausgewählten Haushalten. Die Zufallsvariable X ist wie in den vorhergegangenen Aufgabenteilen binomialverteilt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der 100 zufällig ausgewählten Haushalte ein 2 - Personen - Haushalt ist, liegt wie im Aufgabenteil b2 bei $p = 0,4$. Gesucht ist hier die Wahrscheinlichkeit zu diesem Ereignis: $P(X > 40)$. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis berechnest du über dessen Gegenereignis, es gilt also:
$P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40)$.

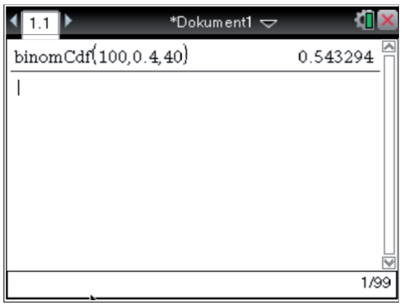
Die Wahrscheinlichkeit von $P(X \leq 40)$ von Hand zu berechnen wäre sehr umständlich, jedoch lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe deines CAS bestimmen. Füge dazu über die unten beschriebene Funktionsfolge den entsprechenden Befehl in den Calculator - Modus deines CAS ein:

`menu` → 5: Wahrscheinlichkeit → 5: Verteilungen... → E: Binomial Cdf...

Dieser Befehl ist so anzuwenden:

`binomcdf(n,p,k)`

Dabei entspricht n der Grundgesamtheit, p ist die Wahrscheinlichkeit der zugehörigen binomialverteilten Zufallsvariablen und k ist die Merkmalsausprägung von X, zu welcher die zugehörige Wahrscheinlichkeit berechnet werden soll. Hier wendest du den Befehl also so an:



`binomcdf(100,0.4,40)`

$P(X \leq 40) = 0,5433$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 40, der 100 zufällig ausgewählten Haushalte, 2 - Personen - Haushalte sind, ist also:
$P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) = 1 - 0,5433 = 0,4567(45,67\,\%)$.

(2) **▶ Wahrscheinlichkeit, dass $>$ 34 und $<$ 55 Zwei - Pers. - Haushalte ausgewählt werden**

Deine Aufgabe ist es hier, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass mehr als 34 und höchstens aber 55 Zwei - Personen Haushalte ausgewählt werden. Die Zufallsvariable X beschreibt auch hier wieder die Anzahl der Zwei - Personen - Haushalte unter den 100 ausgewählten. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis:
$P(34 < X < 55)$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses kannst du nur dann berechnen, wenn du dieses wie folgt umformst:
$P(34 < X < 55) = P(X \leq 54) - P(X \leq 36)$

Benutze auch hier wieder wie im Aufgabenteil zuvor dein CAS zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten. Du solltest zu folgendem Resultat gekommen sein:

$$\begin{aligned} P(34 < X < 55) &= P(X \leq 54) - P(X \leq 36) \\ &= \texttt{binomcdf(100,0.4,54)} - \texttt{binomcdf(100,0.4,36)} \\ &= 0,86795 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich mehr als 34 und weniger als 55 Zwei - Personen - Haushalte unter den 100 ausgewählten befinden, ist 86,795 %.

c2) **▶ Wahrscheinlichkeit, dass in mehr als 80 Haushalten eine Person angetroffen wird**

Auch hier handelt es sich wieder um eine binomialverteilte Zufallsvariable. Die Zufallsvariable X beschreibt dabei die Anzahl der Haushalte, in denen eine Person zur Befragung angetroffen wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem dieser Haushalte eine Person zur Befragung angetroffen wird, liegt bei 75 %. Gesucht ist hier die Wahrscheinlichkeit, dass in mehr als 80 der 100 ausgewählten Haushalte eine Person zur Befragung angetroffen wird, also $P(X > 80)$.
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignis $P(X > 80)$ bestimmst du hier über dessen Gegenereignis, also:

$P(X > 80) = 1 - P(X \leq 80)$

Bestimme diese Wahrscheinlichkeit wie im Aufgabenteil c1 mit Hilfe deines CAS. Mit $n = 100$, $k = 80$ und $p = 0,75$ ergibt sich:
$P(X > 80) = 1 - P(X \leq 80) = 1 - 0,9005 = 0,0995$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in 80 der zufällig ausgewählten Haushalte eine Person angetroffen wird, ist 9,95 %.

d1) (1) ▶ **Berechnen einer möglichen durchschnittlichen Haushaltsgröße** (8 BE)

Eine mögliche durchschnittliche Haushaltsgröße berechnest du hier, wie im Aufgabenteil a, über das arithmetische Mittel $\overline{x}$. Im Gegensatz zum Aufgabenteil a hast du hier jedoch die absoluten Häufigkeiten gegeben. Das arithmetische Mittel $\overline{x}$ berechnest du hier, indem du die einzelnen Haushaltsgrößen mit der zugehörigen absoluten Anzahl der Haushalte dieser Größe multiplizierst und die einzelnen berechneten Werte auch hier wieder aufsummierst. Diese Summe teilst du anschließend durch die Anzahl $x_{ges.}$ aller Haushalte in Deutschland.

Berechnen des arithmetischen Mittels $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{5} h(x_i) \cdot x_i}{x_{ges.}}$$

$$\overline{x} = \frac{14.566 \cdot 1 + 13.335 \cdot 2 + 5.413 \cdot 3 + 4.218 \cdot 4 + 1.590 \cdot 5}{39.122}$$

$$\overline{x} = \frac{82.297}{39.122}$$

$$\overline{x} = 2,103$$

Eine mögliche durchschnittliche Haushaltsgröße aller Haushalte in Deutschland ist $\approx 2,1$ Personen pro Haushalt.

(2) ▶ **Begründung, warum eine exakte Berechnung nicht möglich ist**

Eine exakte Berechnung der mittleren Haushaltsgröße in Deutschland ist mit den gegebenen Daten nicht möglich, da die Informationen über Haushalte mit mehr als 5 Personen unvollständig sind. Das heißt, Haushalte mit zum Beispiel 6 oder 7 Personen werden hier nicht ausreichend berücksichtigt, was das arithmetische Mittel verfälscht.

d2) ▶ **Berechnen der Anzahl, der 6 - Personen - Haushalte**

Der Tabelle aus der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass es in Deutschland insgesamt 1.590.000 Haushalte, mit 5 oder 6 Personen pro Haushalt, gibt. Entspricht x der Anzahl der 5 - Personen - Haushalte und y der Anzahl der 6 - Personen - Haushalte, so lässt sich die Anzahl der Haushalte mit 5 oder 6 Personen über diese Gleichung berechnen:
$x + y = 1.590.000$

Die Einwohnerzahl Deutschlands kann auch mit Hilfe der Anzahl der einzelnen Haushalte und der in ihnen lebenden Personen bestimmt werden. Multipliziere dazu die Anzahl der einzelnen Haushalte mit der Anzahl der Personen, die in den einzelnen Haushalten leben. Summierst du die berechneten Werte auf, hast du die Einwohnerzahl von Deutschland bestimmt. Stellst du die Gleichung zur Berechnung der Einwohnerzahl in Abhängigkeit von x und y auf, so sollte diese so aussehen:

$$1000 \cdot (14.566 \cdot 1 + 13.335 \cdot 2 + 5.413 \cdot 3 + 4.218 \cdot 4) + 5 \cdot x + 6 \cdot y = 82.501.000$$

Stellst du den Term wie folgt um, entsteht diese Gleichung:

$$\begin{aligned} 1000 \cdot (14.566 \cdot 1 + 13.335 \cdot 2 + 5.413 \cdot 3 + 4.218 \cdot 4) + (5 \cdot x + 6 \cdot y) &= 82.501.000 \\ 74.347.000 + 5 \cdot x + 6 \cdot y &= 82.501 \qquad \mid -74.347.000 \\ 5 \cdot x + 6 \cdot y &= 8.154.000 \end{aligned}$$

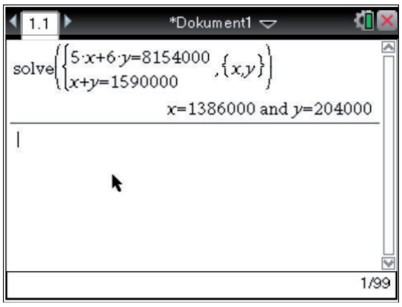
Es ist also dieses lineare Gleichungssystem entstanden:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 5 \cdot x + 6 \cdot y = 8.154.000 \\ \text{II} & \qquad x + y = 1.590.000 \end{array}$$

Löse das lineare Gleichungssystem mit Hilfe deines CAS. Füge dazu über diese Eingabenfolge ein Gleichungssystem in den Calculator - Modus deines CAS ein:

`menu` → 3: Algebra → 7: Gleichungssystem lösen
→ 1: Gleichungssystem lösen...

Hier ist ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und Variablen zu lösen. Hast du die oben bestimmten Gleichungen richtig in deinen CAS übertragen, sollte das Gleichungssystem und dessen Lösung wie in der nebenstehenden Abbildung aussehen.



In Deutschland gibt es insgesamt 204.000 Sechs - Personen - Haushalte.