1.1 **▶ Prüfen, ob das Dreieck ABC einen rechten Winkel hat** (5P)

Betrachte die Punkte $A(1 \mid 2 \mid 2)$, $B(7 \mid 14 \mid 2)$ und $C(2 \mid 4 \mid -3)$.

Deine Aufgabe ist es, das Dreieck ABC auf einen rechten Winkel zu untersuchen.

Allgemein gilt: Schließen zwei Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ einen rechten Winkel ein, so gilt für das Skalarprodukt dieser:

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$$

Verwende diesen allgemeinen Zusammenhang zur Überprüfung, ob ein rechter Winkel vorliegt. Beachte dabei, dass du zuerst die Kantenvektoren aufstellen musst, bevor du das Skalarprodukt aus beiden Vektoren berechnen kannst.

Überprüfe also, ob zwischen den drei Kantenvektoren ein rechter Winkel existiert. Berechne dazu:

- $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AB}$

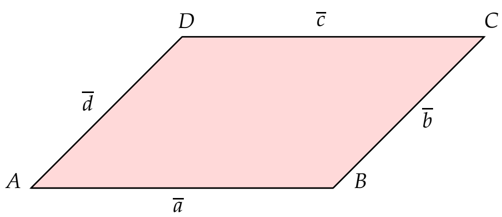
▶ Bestimmen von D, sodass ein Parallelogramm vorliegt

Betrachte das Dreieck ABC. Dieses Dreieck soll nun um einen Punkt D so erweitert werden, sodass aus dem Dreieck ein Parallelogramm entsteht.

Für ein Parallelogramm müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel zueinander.
- Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

Laut den zuvor angeführten Eigenschaften gilt für die Seitenlängen: $\overline{a} = \overline{c}$ und $\overline{b} = \overline{d}$.



Ein möglicher Lösungsweg ist: Bestimme den Vektor $\overrightarrow{BC}$. Addierst du diesen Vektor $\overrightarrow{BC}$ zum Vektor $\overrightarrow{OA}$, so erhältst den Ortsvektor zum gesuchten Punkt D.

1.2 **▶ Überprüfen, ob die Ebene, die ABC enthält, die x_3-Achse enthält** (4P)

Betrachte wieder das Dreieck ABC und die Ebene, in der es liegt. Überprüfe, ob die x_3-Achse in dieser Ebene enthalten ist.

Eine Geradengleichung der x_3-Achse lautet:

$$\overrightarrow{x_3} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Jeder Punkt, der auf der x_3-Achse liegt, wird für einen entsprechenden Parameterwert für t mit dieser Geradengleichung erfasst.

Um nun zu überprüfen, ob die x_3-Achse in der Ebene E liegt, kannst du wie folgt vorgehen:

- Stelle die **Ebenengleichung** der Ebene E in Parameterform auf.
- Untersuche, ob die x_3-Achse in dieser Ebene liegt, indem du den **Schnittpunkt** der beiden berechnest. Erhältst du unendlich viele Schnittpunkte, so hast du gezeigt, dass die x_3-Achse in der Ebene liegt. Erhältst du keinen oder nur einen Schnittpunkt, so ist das nicht der Fall.

Einen Ebenengleichung in Parameterform einer Ebene E hat allgemein folgende Form:

$$\boldsymbol{E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{o} + r \cdot \overrightarrow{u} + s \cdot \overrightarrow{v}; \; r, t} \in \mathbb{R},$$

dabei stellen die Vektoren $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ die Richtungsvektoren und $\overrightarrow{o}$ den Stützvektor dar.

1.3 ▶ **Paralleler Kantenvektor zur Koordinatenebene ausfindig machen** (6P)

Betrachte wieder das Dreieck ABC und zeige, dass eine Seite des Dreiecks ABC parallel zu einer der Koordinatenebenen ist.

Da du zu Beginn nicht weißt, um welche Koordinatenebene es sich handelt, ist es hilfreich, zunächst alle Kantenvektoren des Dreiecks ABC zu betrachten.

Damit eine Seite parallel zu einer Koordinatenebene ist, muss für den jeweilig zugehörigen Vektor eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- Parallel zur x_1x_2-Ebene: x_3-Koordinate des Vektors gleich Null.
- Parallel zur x_1x_3-Ebene: x_2-Koordinate des Vektors gleich Null.
- Parallel zur x_2x_3-Ebene: x_1-Koordinate des Vektors gleich Null.

Prüfe also, ob für einen Kantenvektor des Dreiecks ABC eine der drei aufgezählten Bedingungen erfüllt ist.

▶ **Zeigen, dass die $\boldsymbol{x_1x_2}$-Ebene eine Strecke aus $\boldsymbol{ABC}$ ausschneidet**

Deine Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die x_1x_2-Ebene eine Strecke aus dem Dreieck ABC ausschneidet. Um nachzuweisen, dass das der Fall ist, kannst du zeigen, dass das Dreieck ABC durch die x_1x_2-Ebene verläuft bzw. dass das Dreieck ABC diese schneidet.

Betrachte dazu die Eckpunkte des Dreiecks mit

- $A(1 \mid 2 \mid 2)$,
- $B(7 \mid 14 \mid 2)$,
- $C(2 \mid 4 \mid -3)$.

Versuche anhand der Lage der Punkte A, B und C zu begründen, dass das Dreieck die x_1x_2-Ebene schneiden muss.

► Länge der Strecke berechnen

Im Abschnitt zuvor hast du gezeigt, dass die x_1x_2-Ebene eine Strecke aus der Dreiecksfläche des Dreiecks ABC ausschneidet. Berechne nun die Länge dieser Strecke.

Dabei kannst du wie folgt vorgehen:

- Bestimme die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Kantenvektoren mit der x_1x_2-Ebene.
- Stelle den Vektor $\overrightarrow{S_1S_2}$ auf.
- Berechne den Betrag des Vektors $\overrightarrow{S_1S_2}$, um die Länge der gesuchten Strecke zu erhalten.

Erinnerung: Den Betrag eines Vektors $\overrightarrow{A}$ kannst du wie folgt berechnen:

$$\mid \overrightarrow{OA} \mid = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$