

2.1 ► **Angabe der Ebenengleichung**

(2P)

Drei Punkte definieren immer eindeutig eine Ebene. Die Ebene in der die Zielscheibe liegt, ist durch die Punkte E , R und Z bestimmbar.

Mit diesen drei Punkten lässt sich eine Parametergleichung der Ebene E der Zielscheibe angeben.

Eine Parametergleichung mit den Parametern r und s einer Ebene hat allgemein die Form:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{\text{Stützvektor}} + r \cdot \overrightarrow{\text{Spannvektor}_1} + s \cdot \overrightarrow{\text{Spannvektor}_2}$$

Ein Stützvektor ist dabei ein Ortsvektor eines Punktes der Ebene, etwa Z , der zugehörige Stützvektor lautet dann:

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} -5.000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Die Spannvektoren sind Vektoren, die nicht zueinander parallel sind und in der Ebene liegen. Solche Vektoren wären die Verbindungsvektoren \overrightarrow{ZE} und \overrightarrow{ZR} . Ihre Koordinaten ergeben sich aus der Differenz ihre Endpunkte:

$$\overrightarrow{ZE} = \begin{pmatrix} -5.005 - (-5.000) \\ 100 - 150 \\ 150 - 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{ZR} = \begin{pmatrix} -5.000 - (-5.000) \\ 200 - 150 \\ 100 - 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Parametergleichung der Ebene E , in der die Zielscheibe liegt, lautet damit:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OZ} + r \cdot \overrightarrow{ZE} + s \cdot \overrightarrow{ZR}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5.000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2.1 ► **Begründung des Größenunterschieds der Schützen**

(7P)

Die beiden Geradengleichungen stellen den Ort der Pfeilspitzen zum Zeitpunkt t dar. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Pfeil abgeschossen, er befindet sich zu diesem Zeitpunkt direkt beim Schützen.

Die Schützen stehen wahrscheinlich auf dem Boden, der durch die x_1x_2 -Ebene dargestellt wird. Ihre Größe ist also allein abhängig von der x_3 -Koordinate. Da die Schützen ihre Pfeile auf Augenhöhe halten, kann man an der x_3 -Koordinate der Pfeilspitzen zum Zeitpunkt $t = 0$ ablesen, wer der beiden der größere Schütze ist.

Setze hierzu $t = 0$ in die beiden Geradengleichungen ein und bestimme die Ortsvektoren $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ der Pfeilspitzen zu diesem Zeitpunkt:

$$g: \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -10.004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix}$$
$$h: \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -10.006 \\ 340 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Schütze 2 hält zum Zeitpunkt des Abschusses seinen Pfeil 10 cm höher als Schütze 1: Er ist höchstwahrscheinlich der Größere der beiden.

► **Begründung, welcher Schütze der Bessere ist**

Es ist derjenige Schütze der Bessere, dessen Pfeil näher am Zentrum die Zielscheibe trifft. Wir suchen also den Abstand der Auftreffpunkte der Pfeile zum Punkt Z , um sie anschließend zu vergleichen.

Die Orte der Pfeile werden durch die beiden Geraden g und h definiert. Die Zielscheibe liegt in der zuvor bestimmten Ebene E . Dort, wo sich Gerade und Ebene schneiden, befinden sich folglich die Auftreffpunkte A_1 und A_2 der beiden Schützen.

Wir suchen also

1. die Schnittpunkte S_1 und S_2 von g mit E und h mit E ,
2. anschließend die Abstände der beiden Punkte von Z .

Als letztes müssen wir diese Abstände vergleichen und damit den besseren Schützen ermitteln.

1. Schritt: Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene

Die Schnittpunkte von E mit den Geraden ermitteln wir, indem wir die Parametergleichung mit den Geradengleichungen gleichsetzen:

$$\text{Schütze 1: } \begin{pmatrix} -5.000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schütze 2: } \begin{pmatrix} -5.000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich nun jeweils in drei Zeilen aufspalten. Es ergeben sich zwei lineare Gleichungssysteme mit den Variablen r , s und t . Vereinfache diese so weit wie möglich:

$$\text{(I)} \quad -5.000 - 5r + 0s = 0 - 10.004t \quad \text{Schütze 1}$$

$$\text{(II)} \quad 150 - 50r + 50s = 0 + 360t$$

$$\text{(III)} \quad 100 + 50r + 0s = 170 - 100t$$

$$\text{(I)} \quad -5r + 0 + 10.004t = 5.000$$

$$\text{(II)} \quad -50r + 50s - 360t = -150$$

$$\text{(III)} \quad 50r + 0 + 100t = 70$$

$$(I) \quad -5.000 - 5r + 0s = 0 - 10.006t \quad \text{Schütze 2}$$

$$(II) \quad 150 - 50r + 50s = 300 - 340t$$

$$(III) \quad 100 + 50r + 0s = 180 - 100t$$

$$(I) \quad -5r + 0 + 10.006t = 5.000$$

$$(II) \quad -50r + 50s + 340t = 150$$

$$(III) \quad 50r + 0 + 100t = 80$$

Die zwei LGS kannst du mithilfe des GTR nach r , s und t auflösen.

Gib dazu die Gleichungssysteme als Matrizen über die Befehlsfolge `MENU → 1 → F3` in den Matrix-Editor ein. Verlasse diesen dann und gib den Befehl zum Lösen der Matrix über `OPTN → F2 → F6 → F5`. Füge dann die jeweilige Matrix über `OPTN → F2 → F1` ein und löse über `EXE`.

A	1	2	3	4
1	-5	0	10006	5000
2	-50	50	340	150
3	50	0	100	80

80

`R-OP ROW COL EDIT`

Rref Mat. A	1	2	3	4
	1	0	0	0.61
	0	1	0	0.2
	0	0	1	0.5

`Mat M+L Det Trn AUE`

B	1	2	3	4
1	-5	0	10004	5000
2	-50	50	-360	-150
3	50	0	100	70

70

`R-OP ROW COL EDIT`

Rref Mat. B	1	2	3	4
	1	0	0	0.4
	0	1	0	1
	0	0	1	0.5

`JUMP DEL F-MAT MATH`

Der GTR liefert für beide LGS eindeutige Lösungen. Um die Koordinaten der Schnittpunkte zu berechnen, können wir die Lösungen von t in die Geradengleichungen einsetzen und damit die Ortsvektoren von S_1 und S_2 bestimmen.

Für den Schützen 1 liefert der GTR $t = 0,5$. Setze in g ein und bestimme $\overrightarrow{OS_1}$:

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -10004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 5002 \\ 0 + 180 \\ 170 - 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5002 \\ 180 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Für den Schützen 2 liefert der GTR ebenfalls $t = 0,5$. Setze in h ein und bestimme $\overrightarrow{OS_2}$:

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -10006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 5003 \\ 300 + 170 \\ 180 - 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5003 \\ 130 \\ 130 \end{pmatrix}$$

Schütze 1 trifft die Zielscheibe damit im Punkt $S_1(-5002 | 180 | 120)$ und Schütze 2 im Punkt $S_2(-5003 | 130 | 130)$.

2. Schritt: Abstände der Auftreffpunkte vom Zentrum Z der Zielscheibe

Der Abstand d zweier Punkte $V(v_1 | v_2 | v_3)$ und $W(w_1 | w_2 | w_3)$ wird allgemein mit der Abstandsformel

$$d = \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 + (w_3 - v_3)^2}$$

berechnet. Setze jeweils die Koordinaten von S_1 oder S_2 und Z in die Formel ein und berechne die Abstände d_1 und d_2 der Auftreffpunkte der Pfeilspitzen vom Zentrum der Zielscheibe:

$$d_1 = \sqrt{(-5000 - (-5002))^2 + (150 - 180)^2 + (100 - 120)^2} = \sqrt{4 + 900 + 400} \approx 36,1109$$

$$d_2 = \sqrt{(-5000 - (-5003))^2 + (150 - 130)^2 + (100 - 130)^2} = \sqrt{9 + 400 + 900} \approx 36,1801$$

Der erste Schütze trifft mit einem Abstand von etwa 36,1109 cm zum Zentrum der Zielscheibe etwas besser als der zweite Schütze, der das Zentrum um circa 36,1801 cm verfehlt.

2.2.2 ► Geringster Abstand der Pfeilspitzen im Flug

(6P)

Die beiden Pfeilspitzen beginnen ihren Flug beide bei $t = 0$ und beenden ihn - wie wir zuvor herausgefunden haben - auf der Zielscheibe bei $t = 0,5$.

Innerhalb dieses Zeitraums haben die beiden Pfeilspitzen einen Abstand voneinander, der vom Zeitpunkt t abhängt. Mithilfe der Geradengleichungen kannst du diesen allgemeinen Abstand definieren.

Dazu kannst du zunächst mithilfe dieser Gleichungen zwei allgemeine Punkte

G und H

auf den Geraden in Abhängigkeit von t definieren, die die Pfeilspitzen darstellen. Im Anschluss kannst du dann durch die Abstandsformel zweier Punkte eine Funktion für den Abstand a in Abhängigkeit der Zeit t erstellen.

Das Minimum dieser Funktion tritt dann zu dem Zeitpunkt t ein, zu dem die Pfeilspitzen den geringsten Abstand zueinander aufweisen.

Wir kommen also in drei Schritten zum Ziel:

1. Allgemeine Punkte auf den Geraden h und g definieren.
2. Mithilfe der Abstandsformel eine Abstandsfunktion der beiden Pfeilspitzen aufstellen.
3. Das Minimum der Funktion ermitteln.

1. Schritt: Definition zweier allgemeiner Punkte auf den Geraden

Die Koordinaten allgemeiner Punkte auf Geraden entsprechen den zugehörigen Zeilen in der Geradengleichung. Für einen allgemeinen Punkt G auf der Geraden g mit der Gleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix}$$

gilt folglich: $G(-10.004t | 360t | 170 - 100t)$.

Für einen allgemeinen Punkt H auf der Geraden h mit der Gleichung

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10.006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix}$$

gilt analog zu G : $H(-10.006t \mid 300 - 340t \mid 180 - 100t)$.

2. Schritt: Abstandsformel für den Abstand von G zu H

Setze nun die Koordinaten in die Abstandsformel zweier Punkte ein und vereinfache. Es ergibt sich daraus eine Abstandsfunktion a in Abhängigkeit der Zeit t zu

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{(-10.006t - (-10.004t))^2 + (300 - 340t - 360t)^2 + (180 - 100t - (170 - 100t))^2} \\ &= \sqrt{(-2t)^2 + (300 - 700t)^2 + 10^2} \end{aligned}$$

$$a(t) = \sqrt{4t^2 + (300 - 700t)^2 + 100}$$

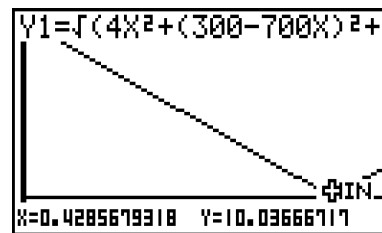
3. Schritt: Minimum der Abstandsfunktion bestimmen

Das Minimum der Abstandsfunktion lässt sich mit dem GTR bestimmen. Füge dazu die Funktionsvorschrift in den $\boxed{Y=}$ -Editor ein und zeichne das Schaubild. Stelle unter $\boxed{\text{SHIFT} \rightarrow \text{F3}}$ den Bildschirm auf das Intervall ein, innerhalb dessen die Pfeilspitzen sich im Flug befinden, also

$[0; 0,5]$.

Du kannst erkennen, dass in diesem Intervall das relative Minimum auch das absolute darstellt. Dieses kannst du über die Befehlsfolge $\boxed{\text{SHIFT} \rightarrow \text{F5} \rightarrow \text{F3}}$ ermitteln.

Der GTR liefert für t im Minimum $t = 0,4286$, für den Abstand $a(t)$ an dieser Stelle erhalten wir $f(0,4286) \approx 10,0367$.



Etwa 0,4286 s nach dem Abschuss haben die beiden Pfeilspitzen damit den geringsten Abstand. Dieser beträgt zu diesem Zeitpunkt rund 10,0367 cm.