1. **▶ Ebenengleichung nachweisen** (6BE)

Bestimme zunächst eine Ebenengleichung in Parameterform. Benutze hierzu den Ortsvektor zum Punkt B $\overrightarrow{OB}$ als Stützvektor und die beiden Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BD}$ als Richtungsvektoren.

$$E_2 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 & - & 10 \\ 10 & - & 5 \\ 2 & - & 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 & - & 10 \\ 0 & - & 5 \\ 0 & - & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, die Koordinatenform der Ebenengleichung aus der Parameterform zu gewinnen. Einmal über den **Normalenvektor** und einmal über **Ausmultiplizieren**.

▶▶ Lösungsweg A: Koordinatenform über Ausmultiplizieren erhalten

Der Vektor $\overrightarrow{x}$ steht für $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Aus der Ebenengleichung von E_2 ergibt sich somit ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x = 10 - 5\lambda - 7\mu \\ \text{II} & y = 5 + 5\lambda - 5\mu \\ \text{III} & z = 1 + \lambda - \mu \end{array}$$

Löse III auf nach λ: $\lambda = z - 1 + \mu$. Setze dies ein in II:

$$\begin{aligned} y &= 5 + 5 \cdot (z - 1 + \mu) - 5\mu \\ y &= 5 + 5z - 5 + 5\mu - 5\mu \\ y &= 5z \qquad \qquad | -5z \\ y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Damit hast du die Parameterform aufgelöst in eine Form, die **parameterfrei** ist. Dies entspricht der Koordinatenform der Ebenengleichung: $E_2 : y - 5z = 0$.

▶▶ Lösungsweg B: Koordinatenform über den Normalenvektor erhalten

Die Koordinatenform der Ebene lautet allgemein $E : ax + by + cz = d$. Dabei entsprechen die Koeffizienten a, b und c genau den **Koordinaten** des Normalenvektors $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Der Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren. Das **Skalarprodukt** des Normalenvektors mit jedem der beiden Richtungsvektoren muss also Null sein. Also gilt:

$$\text{I} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{II} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{I} \quad -5n_1 + 5n_2 + n_3 = 0 \qquad \text{II} \quad -7n_1 - 5n_2 - n_3 = 0$$

Löse II nach n_3 auf: $n_3 = -7n_1 - 5n_2$. Setze ein in I:

$$\begin{aligned} -5n_1 + 5n_2 + (-7n_1 - 5n_2) &= 0 \\ -5n_1 + 5n_2 - 7n_1 - 5n_2 &= 0 \\ -12n_1 &= 0 \quad |:(-12) \\ n_1 &= 0 \end{aligned}$$

Momentan besitzt der Normalenvektor also die Koordinaten $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ -5n_2 \end{pmatrix}$.

Beim Normalenvektor kommt es auf die **Richtung** an und nicht auf die **Länge**. Wähle also z.B. $n_2 = 1$. Hierdurch veränderst du nur die Länge und nicht die Richtung des Vektors und es ergibt sich der Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Die Koordinaten des Normalenvektors sind die Koeffizienten in der Koordinatenform der Ebene:
$E_2 : y - 5z = d$. Setze die Koordinaten des **Stützvektors** $\overrightarrow{OB}$ ein und löse nach d auf:

$$5 - 5 = d = 0\,.$$

Damit ergibt sich die Koordinatenform der Ebene $E_2 : y - 5z = 0$.

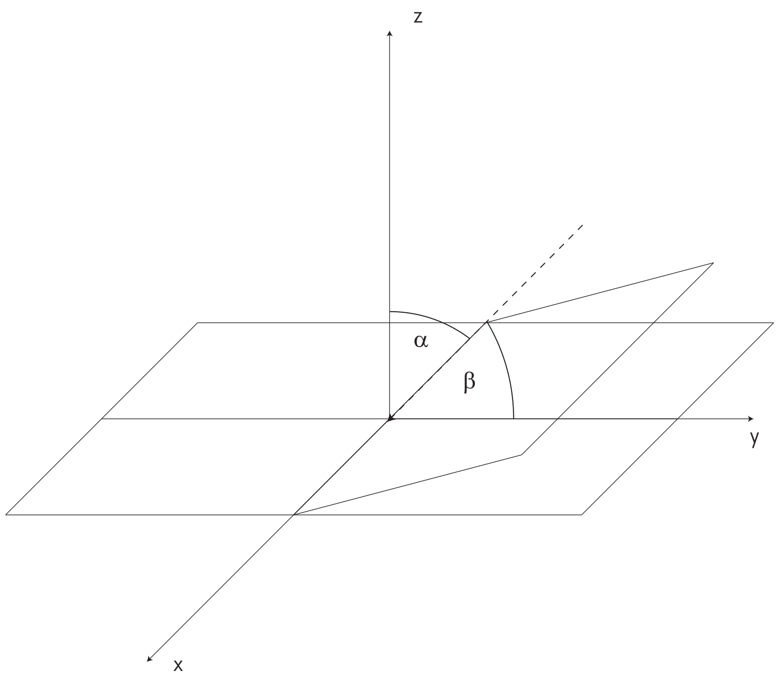
2. ▸ **Fragestellung erläutern und Ergebnisse interpretieren** (6BE)

In der unten stehenden Rechnung wird ein **Schnittwinkel** α zwischen zwei Vektoren berechnet. Der eine Vektor ist dabei Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, welcher die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen darstellt, der andere Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein **Richtungsvektor der** z**-Achse**.

Berechne den Schnittwinkel dieser beiden Vektoren und erhalte die Gleichung:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{1+1+1}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Mit $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,7°$ ergibt sich der Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die z-Achse treffen. Der Winkel β ergibt sich aus $\beta = 90° - \alpha$ und ist somit der Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die x-y-Koordinatenebene treffen.



2.2 ▶ **Wesentliche Schattenpunkte berechnen** (12BE)

Die Koordinaten des **Anfangspunktes** F und des **Endpunktes** F_2 des $7,40\,\text{m}$ hohen Masts sind bekannt: $F(2 \mid 3 \mid 0,6)$ und $F_2\,(2 \mid 3 \mid 8)$. Damit befindet sich der Fußpunkt des Masts in der Ebene E_2.

Der Schatten des Mastes wird erzeugt durch die einfallenden Sonnenstrahlen, die parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ einfallen.

Der Mast wirft nun einen Schatten und knickt an der x-Achse dabei ab. Diese Tatsache führt uns zu zwei wichtigen Punkten:

1. Dem Endpunkt des Schattens, der aufgrund der Richtung des „Sonnenstrahlen-Vektors“ in der Ebene x-y-Ebene liegen muss

2. Dem Schnittpunkt des Schattens mit der x-Achse

1. Schritt: Endpunkt des Schattens berechnen

Den Schatten der Mastspitze $F_2\,(2 \mid 3 \mid 8)$ ermittelst du, indem du den Verlauf des Schattens als eine **Gerade** darstellst, welche den Ortsvektor zum Punkt F_2 als Stützvektor und den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor hat:

$$g_{\text{Schatten von } F_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Schatten der Mastspitze liegt in der x-y-Ebene. Alle Punkte, die in dieser Ebene liegen, besitzen die z-Koordinate $z = 0$. Setze also $z = 0$ ein in die Gleichung der Geraden und berechne die vollständigen Koordinaten dieses Schnittpunktes.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Zeile folgt:

$$0 = 8 - \lambda \quad | +\lambda$$
$$\lambda = 8$$

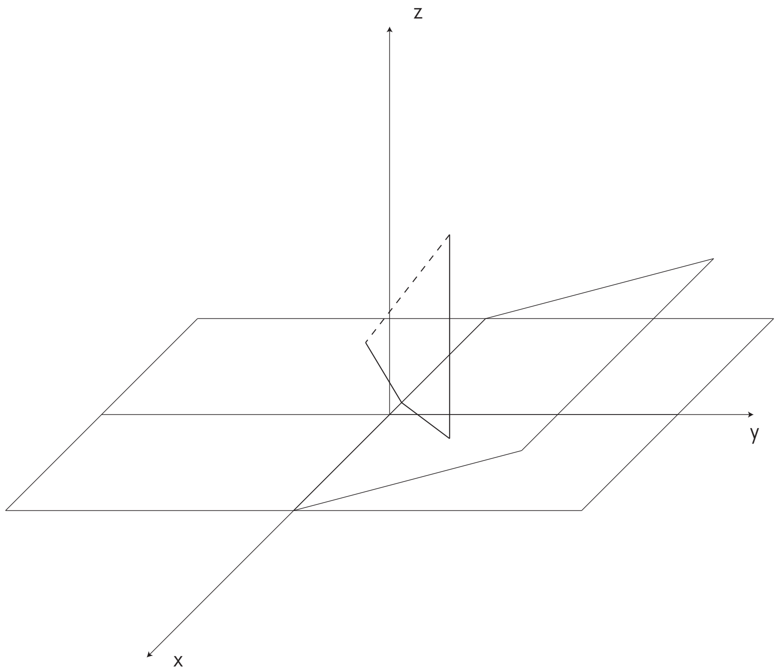
Setze $\lambda = 8$ ein in die Geradengleichung:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-8 \\ 3-8 \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Schattenpunkt F_2' der Mastspitze F_2 hat die Koordinaten $F_2'(-6 \mid -5 \mid 0)$.

2. Schritt: Schnittpunkt des Schattens mit der x-Achse berechnen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen. Beginne zunächst mit einer **Skizze** des Masts und des Schattens:



►► Lösungsweg A: Lösung über Geraden

Da es einen **Schattenpunkt** auf der x-Achse gibt, muss es auch einen zugehörigen Punkt auf dem Mast geben, der diesen Schatten wirft. Nenne diesen Punkt auf dem Mast N und den zugehörigen Schattenpunkt auf der x-Achse N'.

Was wissen wir über diese Punkte? Nun, N' liegt auf der$x$-Achse und hat folglich Koordinaten der Art $N'\,(x \mid 0 \mid 0)$.

Der Punkt N liegt auf dem Mast. Auch dieser lässt sich durch eine Geradengleichung beschreiben. Hierbei dient der Fußpunkt des Masts als Stützvektor und der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, der senkrecht nach oben steht, als Richtungsvektor.

Als Gerade für den Mast ergibt sich also:

$g_{\text{Mast}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0,6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da der Punkt N ein Punkt auf dem Mast ist, hat er folglich allgemein die Koordinaten $N\,(2 \mid 3 \mid 0,6 + \mu)$.

Wenn N und N' Schattenpunkte von einander sind, dann müssen sie über den **Richtungsvektor der Sonnenstrahlen** verbunden sein. Es muss also gelten:

$$\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{ON} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0,6 + \mu \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile folgt:

$$0 = 3 - r \quad | + r$$
$$r = 3$$

Setze $r = 3$ oben ein und erhalte:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0,6 + \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2,4 + \mu \end{pmatrix}$$

Damit besitzt der Punkt N' bisher die Koordinaten $N'\,(-1 \mid 0 \mid -2,4 + \mu)$. Damit dieser Punkt auf der x-Achse liegt, muss $\mu = 2,4$ gewählt werden. Dann hat N' die Koordinaten $N'\,(-1 \mid 0 \mid 0)$. Du könntest jetzt $\mu = 2,4$ einsetzen in die Geradengleichung g_{Mast} und damit den zugehörigen Mastpunkt ermitteln. Dieser interessiert uns in dem Zusammenhang aber nicht.

Der Schatten des Mastes schneidet die x-Achse im Punkt $N'(-1 \mid 0 \mid 0)$ und knickt darin auch ab.

►► Lösungsweg B: Lösung über die Schattenebene

In dieser Lösung wird nicht der Schatten einzelner Punkte, sondern der des gesamten Masts betrachtet.

Dabei wird die Ebene so gewählt, dass sowohl der gesamte Mast, als auch der gesamte Schatten des Masts in ihr liegen. Wähle also als Stützvektor der Schattenebene den Fußpunkt F des Masts. Als ersten Richtungsvektor wählst du den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ des Masts. Als zweiten Richtungsvektor den Vektor $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, welcher die Richtung der Sonnenstrahlen angibt.

Damit ergibt sich als die Ebenengleichung der Schattenebene E_S in Parameterform:

$$E_S : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\0,6\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Ziel ist es nun, den Schnittpunkt dieser Ebene mit der x-Achse zu ermitteln. Alle Punkte N auf der x-Achse haben die Koordinaten $N\,(x \mid 0 \mid 0)$. Setze also die bereits bekannten Koordinaten von N ein in die Parametergleichung der Schattenebene und bestimme die letzte unbekannte Koordinate x.

$$\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0,6\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= 3 - 1\mu \quad &|+\mu \\ \mu &= 3 \end{aligned}$$

Mit $\mu = 3$ folgt aus der letzten Zeile:

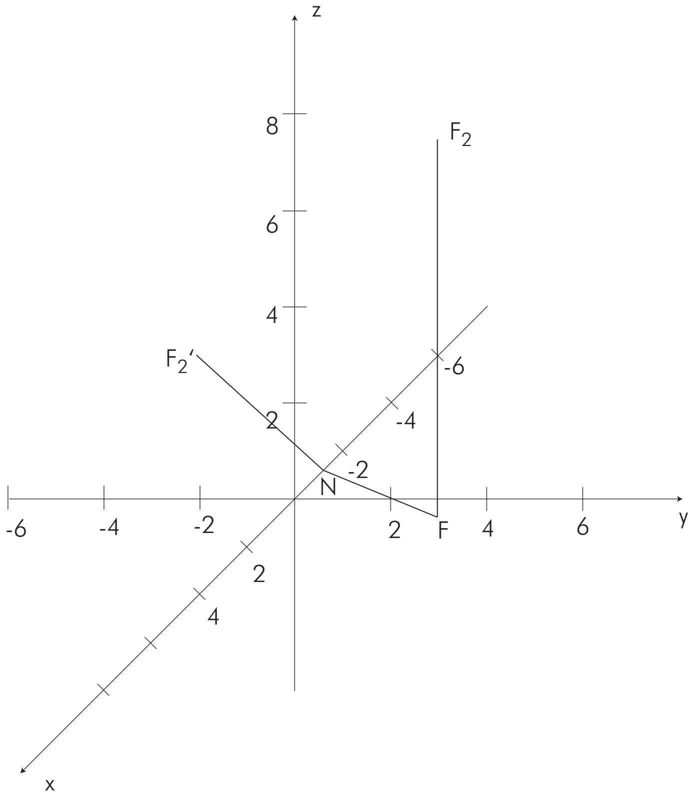
$$\begin{aligned} 0 &= 0,6 + \lambda - 3 \quad &|-\lambda \\ -\lambda &= -2,4 \quad &|\cdot(-1) \\ \lambda &= 2,4 \end{aligned}$$

Setze $\mu = 3$ und $\lambda = 2,4$ ein in die Gleichung der Ebene E_S und berechne die vollständigen Koordinaten des Schattenpunktes N:

$$\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix}2\\3\\0,6\end{pmatrix} + 2,4 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Der Schatten des Mastes schneidet die x-Achse im Punkt $N'(-1 \mid 0 \mid 0)$ und knickt darin auch ab.

▶ **Schaubild des Schattens**



2.3 ▶ **Formel für Berechnung des Schattenpunktes entwickeln** (6BE)

Sei $S\,(a \mid b \mid c)$ ein beliebiger Punkt. Stelle zunächst wie oben eine Gerade auf mit Stützvektor $\overrightarrow{OS}$ und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, um den Verlauf des Schattens als Gerade darzustellen:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Schatten von S soll in der Ebene E_1 liegen. Dies ist genau die x-y-Koordinatenebene. Berechne also den Schnittpunkt von g mit E_1.

Alle Punkte, die in der Ebene E_1 liegen, haben die z-Koordinate $z = 0$. Setze also $z = 0$ ein in die Gleichung der Geraden g:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$0 = c - \lambda \quad \mid +\lambda$

$\lambda = c$

Setze $\lambda = c$ ein in die Geradengleichung von g und berechne so die Koordinaten des Schattenpunktes S':

$$\overrightarrow{OS'} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS'} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jeder beliebige Punkt $S\,(a \mid b \mid c)$ besitzt einen Schattenpunkt $S^*\,(a-c \mid b-c \mid 0)$.