Stammfunktionen

Einführung

Eine Stammfunktion F einer Funktion f ist eine Funktion deren Ableitung mit f übereinstimmt: $F'(x)=f(x)$. Die Integration kann daher sozusagen als Umkehr der Ableitung gesehen werden. Beachte dabei, dass jede Funktion mehrere Stammfunktionen hat.

Beispiel

$F(x)=x^4+2x^3$ ist eine Stammfunktion von $f(x)=4\cdot x^3+6x^2$, ebenfalls ist $G(x)=x^4+2x^3+3$ eine Stammfunktion von f.

Grundlegende Integrationsregel

Die grundlegende Integrationsregel gibt eine Formel dafür an, wie Stammfunkionen von Potenzfuntionen, wie beispielsweise Polynomen, gebildet werden. Ist die Funktion $f(x)=a\cdot x^b$ gegeben, so bildest du eine Stammfunktion von f, indem du den Exponenten b um eins erhöhst und den Vorfaktor a durch diesen „neuen“ Exponenten teilst. Du kannst also alle Stammfunktionen von f mit folgender Formel bilden:

$$\boxed{F(x)=\frac{a}{b+1}\cdot x^{b+1}+c}$$

Dabei ist c eine Konstante, die nicht von x abhängt und dadurch beim Ableiten wieder wegfällt. Daher sind die oben angegebenen Funktionen F für jedes c Stammfunktionen von f.

Beispiel

$f(x)=x$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+c$ mit $c\in\mathbb{R}$

Spezielle Stammfunktionen

- $f(x)=\mathrm{e}^x \;\Rightarrow F_c(x)=\mathrm{e}^x+c$
- $f(x)=\sin(x) \;\Rightarrow F_c(x)=-\cos(x)+c$
- $f(x)=\cos(x) \;\Rightarrow F_c(x)=\sin(x)+c$

Verkettete Funktionen

Es gibt auch eine hilfreiche Regel für das Bilden von Stammfunktionen von Funktionen der Form $f(x)=u\left(v(x)\right)$. Allerdings nur, wenn die innere Funktion $v(x)$ linear ist, das bedeutet, dass dort x nur in der Form $a\cdot x+c$ mit $a,c\in\mathbb{R}$ vorkommt. Die Stammfunktionen von f werden dann wie folgt gebildet:

$$\boxed{F(x)=U\left(v(x)\right)\cdot\frac{1}{v'(x)}+c}$$

Beispiel

Schreibe dir bei einer solchen Aufgabe am besten zuerst $u(x)$, $v(x)$, $U(x)$ und $v'(x)$ auf.

$$f(x) = 3 \cdot (2x+3)^4 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot (2x+3)^5 \cdot \frac{1}{2} + c = \frac{3}{10} \cdot (2x+3)^5 + c$$

Tipp: Du kannst dein Ergebnis überprüfen, indem du $F(x)$ ableitest.