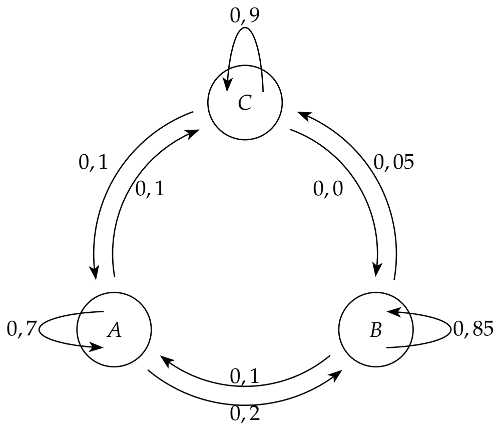
a) **Entwicklung in Übergangsdiagramm darstellen** (8P)



Betrachten wir die erste Zeile der Matrix: 70% der Mitarbeiter von Standort A bleiben auch im nächsten Jahr an Standort A. 10% der Mitarbeiter von Standort B kommen zu Standort A, 10% der Mitarbeiter von Standort C kommen ebenfalls zu Standort A.

Betrachten wir nun die zweite Spalte der Matrix: 10% der Mitarbeiter von Standort B kommen zu Standort A. 85% der Mitarbeiter von Standort B bleiben im Standort B. 5% der Mitarbeiter wechseln zu Standort C.

b) **Verteilungen berechnen** (6P)

Der Vektor, der die Anfangsverteilung angibt, sieht in diesem Fall so aus: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da sich alle 1200 Arbeiter im Standort A und jeweils 0 Arbeiter an den Standorten B und C befinden.

Die Verteilung nach einem Jahr berechnet sich durch Multiplikation der Matrix mit diesem Vektor:

$$\overrightarrow{v}' = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7 \cdot 1200 + 0,1 \cdot 0 + 0,7 \cdot 0 \\ 0,2 \cdot 1200 + 0,85 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0,1 \cdot 1200 + 0,05 \cdot 0 + 0,9 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 840 \\ 240 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v}'' = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 840 \\ 240 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7 \cdot 840 + 0,1 \cdot 240 + 0,1 \cdot 120 \\ 0,2 \cdot 840 + 0,85 \cdot 240 + 0 \cdot 120 \\ 0,1 \cdot 840 + 0,05 \cdot 240 + 0,9 \cdot 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 372 \\ 204 \end{pmatrix}$$

Nach zwei Jahren befinden sich also 624 Mitarbeiter am Standort A, 372 Mitarbeiter am Standort B und 204 Mitarbeiter am Standort C.

c) M^2 **berechnen und interpretieren** (7P)

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 & 0,7 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,85 + 0,1 \cdot 0,05 & 0,7 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0,9 \\ 0,2 \cdot 0,7 + 0,85 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 & 0,2 \cdot 0,1 + 0,85 \cdot 0,85 + 0 \cdot 0,05 & 0,2 \cdot 0,1 + 0,85 \cdot 0 + 0 \cdot 0,9 \\ 0,1 \cdot 0,7 + 0,05 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,1 & 0,1 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,85 + 0,9 \cdot 0,05 & 0,1 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0 + 0,9 \cdot 0,9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,52 & 0,16 & 0,16 \\ 0,31 & 0,7425 & 0,02 \\ 0,17 & 0,0975 & 0,82 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Matrix können wir direkt die Verteilung nach **zwei** Jahren berechnen. Wir sehen z.B. in der ersten Zeile in der zweiten Spalte, dass nach zwei Jahren 16% der Mitarbeiter von Standort B in Standort B bleiben.

d) **Matrix** M^{10} **beschreiben** (7P)

Mit der Matrix M^{10} können wir ausgehend von der Ausgangsverteilung bestimmen, wie die Verteilung direkt nach 10 Jahren aussieht.

Es fällt auf dass die Koeffizienten in der ersten Zeile der Matrix ziemlich ähnliche Werte sind, nämlich immer etwa $0,25$. Da die Werte schon ziemlich ähnlich sind, kann man davon ausgehen, dass sie sich nicht mehr großartig ändern. Somit werden ab dem zehnten Jahr etwa 25% aller Mitarbeiter in Standort A arbeiten.

Da die Werte in Zeile 2 und 3 noch nicht ähnlich genug sind, kann man noch nicht vorhersagen, auf welchen Wert sie sich einpendeln werden. Somit lässt sich über endgültige Mitarbeiterzahlen in den Standorten B und C noch nichts mit Sicherheit sagen.

e) **Verteilung bestimmen, die gleich bleibt** (9P)

Wenn sich eine Verteilung $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ nicht ändern soll, so muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,7v_1 + 0,1v_2 + 0,1v_3 \\ 0,2v_1 + 0,85v_2 + 0v_3 \\ 0,1v_1 + 0,05v_2 + 0,9v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lrrrrl}
\text{I} & 0,7v_1 + & 0,1v_2 + & 0,1v_3 & = v_1 & \mid -v_1 \\
\text{II} & 0,2v_1 + & 0,85v_2 & & = v_2 & \mid -v_2 \\
\text{III} & 0,1v_1 + & 0,05v_2 + & 0,9v_3 & = v_3 & \mid -v_3 \\
\hline
\text{I} & -0,3v_1 + & 0,1v_2 + & 0,1v_3 & = 0 & \\
\text{II} & 0,2v_1 + & -0,15v_2 & & = 0 & \\
\text{III} & 0,1v_1 + & 0,05v_2 + & -0,1v_3 & = 0 & \\
\hline
\text{I} & -0,3v_1 + & 0,1v_2 + & 0,1v_3 & = 0 & \\
\text{II} & 0,2v_1 + & -0,15v_2 & & = 0 & \\
\text{IIIa} & -0,2v_1 + & 0,15v_2 & & = 0 & \mid (\text{I} + \text{III}) \\
\hline
\text{I} & -0,3v_1 + & 0,1v_2 + & 0,1v_3 & = 0 & \\
\text{II} & 0,2v_1 + & -0,15v_2 & & = 0 & \\
\text{IIIb} & 0 & & & = 0 & \mid (\text{II} + \text{IIIa})
\end{array}$$

Aus II folgt:

$$\begin{aligned}
0,2v_1 - 0,15v_2 &= 0 && \mid +0,15v_2 \\
0,2v_1 &= 0,15v_2 && \mid : 0,2 \\
v_1 &= 0,75v_2
\end{aligned}$$

Wird dies eingesetzt in I, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-0,3 \cdot 0,75v_2 + 0,1v_2 + 0,1v_3 &= 0 \\
-0,125v_2 + 0,1v_3 &= 0 && \mid +0,125v_2 \\
0,1v_3 &= 0,125v_2 && \mid : 0,1 \\
v_3 &= 1,25v_2
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0,75v_2 \\ v_2 \\ 1,25v_2 \end{pmatrix}$

Somit gibt es bisher unendlich viele Ergebnisse. Allerdings ist bekannt, dass es insgesamt 1200 Mitarbeiter sein sollen, d.h.:

$$\begin{aligned}
v_1 + v_2 + v_3 &= 1200 \\
0,75v_2 + v_2 + 1,25v_2 &= 1200 \\
3v_2 &= 1200 && \mid : 3 \\
v_2 &= 400
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die endgültige Anfangsverteilung $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0,75 \cdot 400 \\ 400 \\ 1,25 \cdot 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}$

Dies ist die einzige Anfangsverteilung mit 1200 Mitarbeitern, die nach einem Jahr gleich bleibt.

f) **Übergangsquote a bestimmen** (13P)

Als Anfangsverteilung dient wieder der Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Matrix M soll so verändert werden, dass die Übergangsquote von A nach A - d.h. erste Zeile erste Spalte - um einen Summanden k verringert wird und die Übergangsquote von A nach C - d.h. dritte Zeile erste Spalte - um einen Summanden k vergrößert wird.

Wir sollen die Übergangsquote a bestimmen, allerdings sagt uns die Aufgabenstellung nicht wirklich, an welcher Stelle diese Übergangsquote stehen soll. Wir sehen die Übergangsquote a als die von A nach A, d.h. $a = 0,7 - k$.

Die Matrix sieht also so aus:

$$M = \begin{pmatrix} 0,7-k & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1+k & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Sehen wir uns die Verteilung nach einem Jahren mit dieser Matrix an:

$$\begin{pmatrix} 0,7-k & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1+k & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,7-k) \cdot 1200 + 0 + 0 \\ 0,2 \cdot 1200 + 0 + 0 \\ (0,1+k) \cdot 1200 + 0 + 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 840 - 1200k \\ 240 \\ 120 + 1200k \end{pmatrix}$$

Nach dem zweiten Jahr sieht die Verteilung so aus:

$$\begin{pmatrix} 0,7-k & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1+k & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 840-1200k \\ 240 \\ 120+1200k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (0,7-k)\cdot(840-1200k)+0,1\cdot 240+0,1\cdot(120+1200k) \\ 0,2\cdot(840-1200k)+0,85\cdot 240+0 \\ (0,1+k)\cdot(840-1200k)+0,05\cdot 240+0,9\cdot(120+1200k) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 588-840k-840k+1200k^2+24+12+120k \\ 168-240k+204 \\ 84+840k-120k-1200k^2+12+108+1080k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 624-1560k+1200k^2 \\ -240k+372 \\ -1200k^2+1800k+204 \end{pmatrix}$$

Über die gewünschte Verteilung nach 2 Jahren wissen wir nur, dass 500 Mitarbeiter am Standort A arbeiten sollen. Deshalb benutzen wir nur die erste Zeile dieses Vektors:

$$\begin{aligned} 624-1560k+1200k^2 &= 500 && \mid -500 \\ 1200k^2-1560k+124 &= 0 && \mid : 1200 \\ k^2-\frac{13}{10}k+\frac{31}{300} &= 0 \\ k_{1,2} &= \frac{13}{20} \pm \sqrt{\frac{169}{400}-\frac{31}{300}} \\ &= \frac{13}{20} \pm 0,565 \\ k_1 &\approx 1,215 \\ k_2 &\approx 0,085 \end{aligned}$$

Da k_1 ein zu großer Wert ist, kommt nur k_2 in Frage. Somit gilt für die neue Übergangsquote a von A nach A: $0,7-0,085=0,615$. Für die neue Übergangsquote von A nach C gilt: $0,1+0,085=0,185$.