a) ► **Endpunkt des Tunnels bestimmen** (7P)

Die Aufgabe gibt dir vor, dass ein Tunnel vom Ausgangspunkt T_1 entlang eines Vektors $\overrightarrow{u}$ gegraben werden soll. Somit kannst du den Tunnel als Gerade darstellen. Der Endpunkt des Tunnels ist dann gerade der Schnittpunkt der Gerade durch T_1 mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{u}$ mit der DCS-Ebene.

Du erhältst also deine Gerade g, die den Tunnel beschreibt über

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OT} + t \cdot \overrightarrow{u}.$$

Die Ebene DCS kannst du dann über die gegebenen Punkte aufspannen:

$$DCS: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DC} + r \cdot \overrightarrow{DS}$$

Einen Vektor $\overrightarrow{DC}$ berechnest du mit

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

Aus diesen Vorgaben kannst du nun die Gerade g, die den Tunnelverlauf darstellt, und die Ebene DCS, die eine Seite des Berges symbolisiert, aufstellen.

Den Schnittpunkt T_2 erhältst du dann über die Gleichung $\overrightarrow{x}_g = \overrightarrow{x}_{DCS}$ oder

$$\overrightarrow{OT_1} + t \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OD} + u \cdot \overrightarrow{DC} + r \cdot \overrightarrow{DS}$$

1. Schritt: g und DCS aufstellen

Stelle zunächst die einzelnen Vektoren auf, die du noch benötigst. Dabei handelt es sich um die Vektoren $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{DS}$. Berechne diese nach obiger Vorgabe.

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Somit hast du die fehlenden Vektoren bestimmt, sodass du nun sowohl die Gerade g als auch die Ebene DCS aufstellen kannst.

$$g: \overrightarrow{x_g} = \overrightarrow{OT_1} + t \cdot \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} DCS: \overrightarrow{x_{DCS}} &= \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DC} + r \cdot \overrightarrow{DS} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

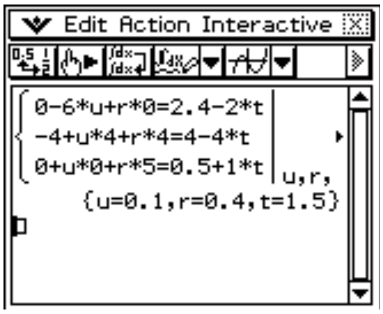
Du hast nun sowohl die Ebenengleichung als auch die Geradengleichung bestimmt, sodass du die Gleichung $\overrightarrow{x}_g = \overrightarrow{x}_{DCS}$ lösen kannst. Dadurch erhältst du den Punkt T_2.

2. Schritt: T_2 bestimmen

Es ergibt sich also die Gleichung, die du lösen sollst mit

$$\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-6\\4\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,4\\4\\0,5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$$

Diese kannst du mit dem CAS-Rechner lösen. Verwende dazu den `solve`-Befehl. Formuliere dazu die Gleichung als Gleichungssystem mit drei Zeilen und drei Variablen, sodass dieses eindeutig lösbar ist. Löse dieses dann mit Hilfe des Rechners auf. Den Befehl für ein Gleichungssystem findest du unter `Keyboard→2D`. Wähle dann das Symbol, dass eine geschweifte Klammer mit zwei Zeilen darstellt.

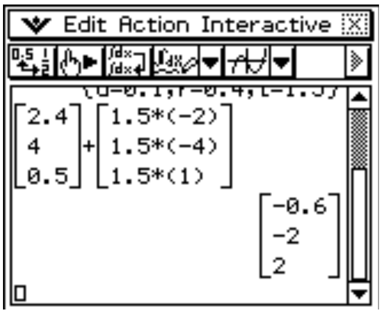


Aus dem Gleichungssystem ergeben sich also die Werte für t, u und r mit $t=1,5$, $u=0,1$ und $r=0,4$.

Setze nun entweder die Parameter u und r in die Ebenengleichung oder den Parameter t in die Geradengleichung ein, um den gesuchten Schnittpunkt zu bestimmen. Es muss der selbe Punkt resultieren.

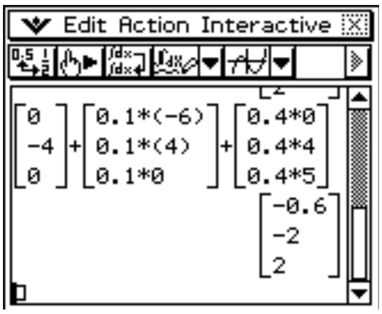
***t* in die Geradengleichung einsetzen:**

Berechne mit deinem CAS also den Vektor $g(1,5)$.



***u* und *r* in die Ebenengleichung einsetzen:**

Über $DCS(0,1,\ 0,4)$ erhältst du auch den Schnittpunkt.

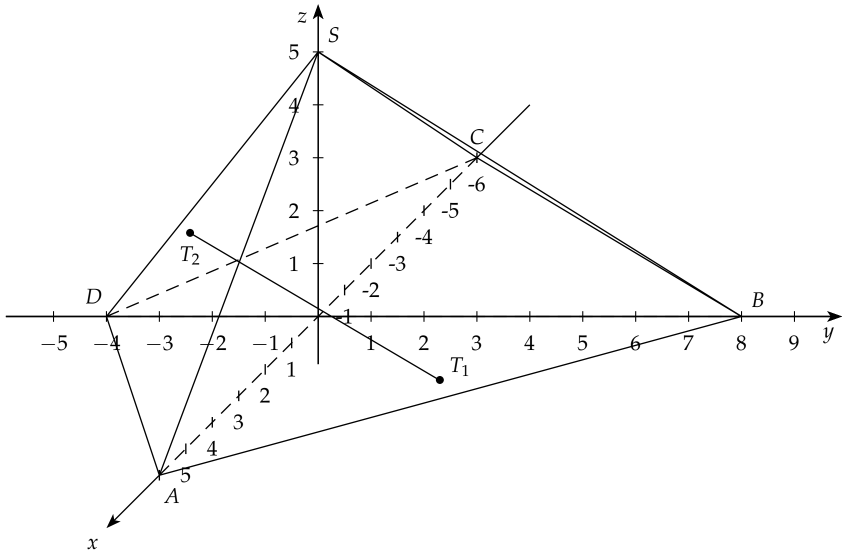


Somit ergibt sich in beiden Fällen derselbe Ortsvektor $\overrightarrow{OT_2} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und folglich der Punkt T_2 mit $T_2(-0,6 \mid -2 \mid 2)$. Dies ist gerade der Punkt, der von der Aufgabe als Kontrollergebnis angegeben wird, sodass du den richtigen Punkt T_2 berechnet hast.

▶ Tunnel skizzieren

Um den Tunnel zu skizzieren musst du den Anfangspunkt T_1 und den Endpunkt T_2 in die Zeichnung eintragen und dann verbinden. Achte darauf, dass die Verbindungsstrecke nicht über die beiden Punkte hinaus geht, da der Tunnel sich nur zwischen den Punkten erstreckt und danach endet.

Es ergibt sich dann folgendes Bild:



▶ Länge des Tunnels ermitteln

Die Länge des Tunnels wird gerade durch den Abstand der Punkte T_1 und T_2 beschrieben. Allgemein kannst du den Abstand zweier Punkte mit $P_1(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ und $P_2(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$ über

$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ bestimmen.

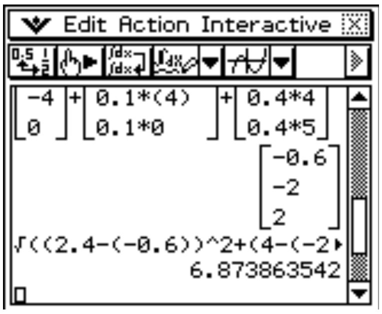
Setze also die Koordinaten von T_1 und T_2 in die Formel ein, um den Abstand $d(T_1, T_2)$ zu bestimmen. Die Punkte T_1 und T_2 haben die Koordinaten

$T_1(2,4 \mid 4 \mid 0,5)$ und $T_2(-0,6 \mid -2 \mid 2)$.

Es ergibt sich die Formel mit

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(2,4 - (-0,6))^2 + (4 - (-2))^2 + (0,5 - 2)^2}$$

Berechne daraus nun den Abstand von T_1 und T_2 und erhalte so die Länge des Tunnels. Dies kannst du mit deinem CAS bewerkstelligen.



Somit ist der Tunnel ca. 6,87 km lang.

b) ► **Größe des Winkels α bestimmen** (8P)

Die Größe eines Winkels α, der von zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ eingeschlossen wird, kannst du über die Formel

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

bestimmen. Dabei beschreibt $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ das Skalarprodukt von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$. Der Betrag eines Vektors beschreibt seine Länge.

Nach diesen Vorgaben kannst du nun den Winkel zwischen den Vektoren bestimmen. Die Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AB}$ kannst du berechnen mit

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA}$$

Berechne also zunächst die Vektoren, die den Winkel α einschließen und berechne dann über die oben stehende Formel den Winkel α.

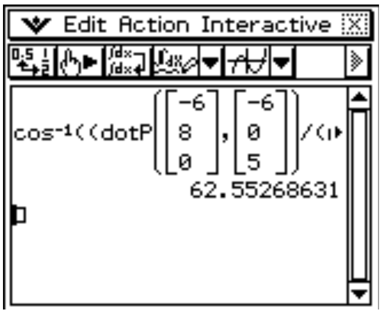
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nun kannst du den gesuchten Winkel α bestimmen. Löse dazu die folgende Gleichung mit dem `solve`-Befehl deines Rechners. Stelle davor aber deinen Rechner auf Gradmaß um, um das richtige Ergebnis zu erhalten. Den Betrag eines Vektors erhältst du über den `norm`-Befehl.

Berechne also:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AS}|}\right)$$



Somit schließen die Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AB}$ einen Winkel von ca. 62,61° ein.

▶ Winkel β berechnen

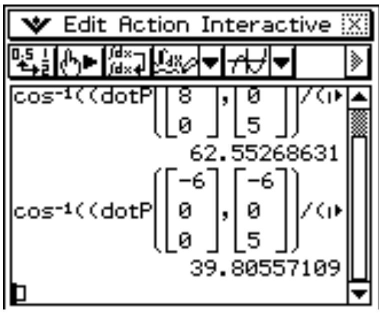
Den Winkel β berechnest du analog zum Winkel α. Es ergeben sich die Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AO}$, die den Winkel β einschließen mit

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OO} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$$

Setze diese Vektoren wieder in die Formel zur Berechnung der Winkel ein.

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} \Leftrightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AS}|}\right)$$



Somit schließen die Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AO}$ einen Winkel von ca 39,81° ein.

▶ Allgemeine Größe des Winkels α_P bestimmen

Gehe auch hier genauso vor wie bereits in den konkreten Fällen von α und β. Der Punkt P hat allgemein die Koordinaten $P(0 \mid p \mid 0)$. Somit kannst du den Vektor $\overrightarrow{AP}$ aufstellen mit

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\p\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\p\\0\end{pmatrix}$$

Den Vektor $\overrightarrow{AS}$ hast du bereits für α und β berechnet mit

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Setze die beiden Vektoren nun in die Formel zur Winkelberechnung wie folgt ein.

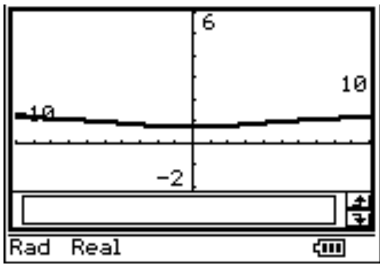
$$\begin{aligned}
\cos(\alpha_p) &= \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} \\
&= \frac{(-6)\cdot(-6) + p \cdot 0 + 5 \cdot 0}{\sqrt{(-6)^2 + p^2 + 0} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 0 + 5^2}} \\
&= \frac{36}{\sqrt{36 + p^2} \cdot \sqrt{61}} \qquad\qquad | \cos^{-1} \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{36}{\sqrt{36+p^2}\cdot\sqrt{61}}\right)
\end{aligned}$$

Somit hast du einen Term zur Berechnung von α_p in Abhängigkeit von p aufgestellt, der sich nicht weiter vereinfachen lässt.

▶ Aussagen beurteilen

Wenn du eine Aussage beurteilen sollst, so kann diese wahr oder falsch sein. Folglich musst du beide Möglichkeiten in Betracht ziehen.

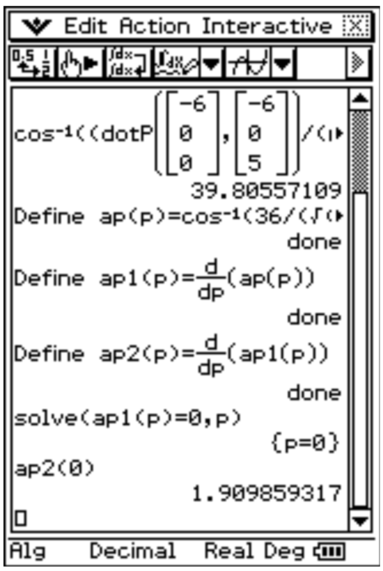
Um die Aussage beurteilen zu können, solltest du dir folglich zunächst ein Bild davon machen, wie sich der Winkel α_p im Abhängigkeit von p verhält. Dazu kannst du α_p als Funktion in deinen Rechner eingeben. Im Graph Modus kannst du dir ein Bild davon machen, wie sich der Winkel in Abhängigkeit von p verhält.



Du kannst erkennen, dass sich in der Nähe von $p = 0$ ein Minimum befindet. Untersuche also die Funktion α_p auf Minima. Prüfe dazu die notwendige Bedingung $\alpha_p'(p) = 0$ und die hinreichende Bedingung $\alpha_p''(p) > 0$.

Den Befehl zum Ableiten findest du unter `Interactive→Calculation→diff`. Daraus ergeben sich die gesuchten Werte für p mit

$p = 0$



Da für $p = 0$ die hinreichende und notwendige Bedingung erfüllt sind, wird für $p = 0$ der Minimale Funktionswert von $\alpha_p(p)$ erreicht. Folglich ist auch der Winkel, der für $p = 0$ resultiert, der kleinste.

Dies ist gerade der Winkel β, wie du der Aufgabe entnehmen kannst. Folglich ist die Behauptung richtig.