Gegeben sind die Funktionen f_a durch

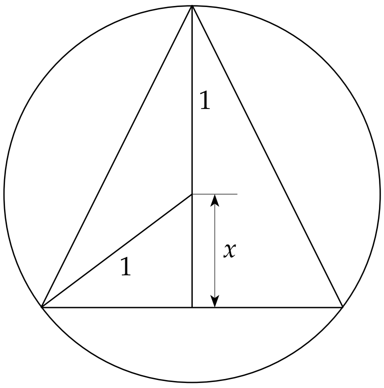
$$y = f_a(x) = -x^3 - ax^2 + a^2x + a^3 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0.$$

Ihre Graphen seien G_a.

a) Ermitteln Sie die Art und Lage der lokalen Extrempunkte der Graphen G_a und eine Gleichung der Ortskurve ihrer lokalen Hochpunkte.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen f_a für $x \to \pm\infty$.

b) Zeigen Sie, dass $x = 1$ Nullstelle der Funktion f_1 ist und untersuchen Sie die Funktion f_1 auf weitere Nullstellen.
Zeichnen Sie den Graphen G_1 im Intervall $-2 \leq x \leq 1{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Der Graph G_1 schließt mit der x-Achse eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

c) Einer Kugel, deren Radius die Maßzahl 1 hat, soll ein gerader Kreiskegel mit größtmöglichem Volumen so einbeschrieben werden, dass der Mittelpunkt der Kugel im Innern des Kegels liegt.
Die Abbildung zeigt von einem einbeschriebenen Kegel und der Kugel einen ebenen Schnitt durch die Kegelspitze und den Kugelmittelpunkt.
Zeigen Sie, dass



$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot f_1(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-x^3 - x^2 + x + 1)$$

Gleichung einer Zielfunktion V zum Lösen dieser Extremwertaufgabe ist und geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Zielfunktion an.
Die Funktion V hat die gleichen lokalen Extremstellen wie die Funktion f_1.
Geben Sie die Höhe des Kreiskegels, dessen Volumen maximal ist, an.