a) (1) ► **Koordinaten von S nachweisen**

Die Pyramide steht in der Mitte der Halle. Aus der Abbildung 1 kannst du entnehmen, dass sie von allen Seiten gleich weit entfernt steht.

Folglich entspricht der Mittelpunkt des Hallenbodens der senkrechten Projektion des Mittelpunkts der Fläche $ABCD$ auf die xy-Ebene.

Außerdem entspricht der Mittelpunkt von $ABCD$ der senkrechten Projektion von S auf $ABCD$. Somit entspricht der Mittelpunkt des Hallenbodens der senkrechten Projektion von S auf die xy-Ebene.

Bestimme folglich die Koordinaten des Mittelpunkts des Hallenbodens und füge die Differenz der Höhe des Mittelpunkts der Halle zu S zu der z-Koordinate hinzu, um die Koordinaten von S zu erhalten.

- Mittelpunkt der Hall entspricht der senkrechten Projektion von S auf die xy-Ebene
- $M(x_m \mid y_m \mid z_m) \Longrightarrow S(x_m \mid y_m \mid z_m + z_s)$
- quadratische Grundfläche der Halle $\Longrightarrow x_m = y_m$

(2) ► **Seitenlängen von ABS berechnen**

Die Seitenlängen eines Dreiecks im dreidimensionalen Raum kannst du über die Länge der Vektoren, die die Seiten des Dreiecks bilden, bestimmen.

Die Länge eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ bestimmst du über seinen Betrag mit $|\overrightarrow{AB}|$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

- Länge des jeweiligen Vektors beschreibt Seitenlänge
- Länge eines Vektors: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

(3) ► **Volumen der Pyramide bestimmen**

Das Volumen einer Pyramide bestimmt sich allgemein über $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. G beschreibt den Flächeninhalt der Grundfläche $ABCD$ der Pyramide und h die dazu senkrecht stehende Höhe.

- $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
- $G = (\overline{AB})^2$
- h Abstand $ABCD$ zu S

b) **► Koordinaten der Eckpunkte ermitteln**

Die Lichtquelle scheint die Seitenfläche BCS direkt an. Daher werden ihre Eckpunkte als Eckpunkte des Schattendreiecks direkt an die Wand mit der Koordinatengleichung $y = 0$ geworfen.
Die Eckpunkte werden durch die Strahlen der Lampe L und durch den jeweiligen Eckpunkt definiert.
Bilde Geraden aus L und B, C und S, die du dann mit der Ebene $y = 0$ schneiden lässt und so die Schatteneckpunkte erhältst.

Die Geraden stellst du auf über

$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OL} + t \cdot \overrightarrow{LC}$

wobei $\overrightarrow{LC}$ der Richtungsvektor ist, den du wie folgt bestimmst.

$\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OL}$

- Geraden durch L und B, C und S
- Schnitt mit der Ebene $y = 0$
- Schnittpunkte bilden Schattenpunkte der Ecken

► Zeigen, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt

Ein Dreieck ist dann gleichschenklig, wenn zwei der Seiten gleichlang sind.

Es muss gelten $|\overrightarrow{S'C'}| = |\overrightarrow{S'B'}|$ oder $|\overrightarrow{C'B'}| = |\overrightarrow{S'C'}|$ oder $|\overrightarrow{C'B'}| = |\overrightarrow{S'B'}|$.

Die Länge eines Vektors bestimmst du über $|\overrightarrow{S'C'}| = \sqrt{(s_1 - c_1)^2 + (s_2 - c_2)^2 + (s_3 - c_3)^2}$

► Flächeninhalt des Dreiecks bestimmen

Die Fläche eines Dreiecks kannst du über die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$. a beschreibt den Abstand der Punkte B' und C', während h den Abstand von S' zu a darstellt.

Berechne den Abstand von B' nach C' über $a = \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 + (b_3 - c_3)^2}$.

Da $a = \overline{B'C'}$, $\overline{B'C'} \parallel x$-Achse und $C' \in \overline{B'C'}$ sowie $B' \in \overline{B'C'}$, gilt $h = z_S - z_B$.

c) (1) **► Eigenschaft von M beweisen**

Die Seitenhalbierende einer Dreiecksseite $\overline{AB}$ halbiert die Seite $\overline{AB}$ im Punkt M_{AB}, den du über $\overrightarrow{OM_{AB}} = \overrightarrow{A} + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ bestimmen kannst.

Außerdem verläuft die Seitenhalbierende durch den der Seite $\overline{AB}$ gegenüberliegenden Punkt S.
Über S und M_{AB} kannst du folglich den Vektor $\overrightarrow{SM_{AB}}$ aufstellen, der die Seitenhalbierende darstellt.

Den Mittelpunkt der Seitenhalbierenden kannst du dann über $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_{AB}} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SM_{AB}}$ bestimmen.

- M_{AB} über $\overrightarrow{OM_{AB}} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ bestimmen
- Seitenhalbierende als Vektor $\overrightarrow{CM_{AB}}$ darstellen
- M über $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SM_{AB}}$ bestimmen

(2) ▶ **Zeigen, dass der Lichtstrahl entlang von $\overrightarrow{l}$ läuft**

Als gegebene Bedingung ist gegeben, dass der Richtungsvektor des Lichtstrahls orthogonal zur Fläche ABS stehen soll.

Jeder Vektor, der orthogonal zu einer Ebene steht, kann als ein Vielfaches des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ der Ebene betrachtet werden.

Folglich muss gelten $\overrightarrow{n} \mathrel{\widehat{=}} \overrightarrow{l}$, damit die Aufgabenstellung erfüllt ist.

Stelle zunächst die Ebene ABS mit

$ABS: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AS}$

auf und bilde im Anschluss über das Kreuzprodukt $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}$ den Normalenvektor der Ebene.

- $\overrightarrow{n} \mathrel{\widehat{=}} \overrightarrow{l}$
- $ABS: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AS}$
- $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}$

▶ **Position der Laser-Lichtquelle ermitteln**

Wie du anhand der Abbildungen 2 und 3 sehen kannst, ist die Pyramidenseite ABS zu der Hallenseite hin gerichtet, die parallel zur $x = 0$ Ebene auf der Höhe $x = 9$ verläuft.

Folglich befindet sich die Laser-Lichtquelle an dieser Hallenseite.

Somit kannst du den Ort der Lichtquelle als Schnittpunkt des Lichtstrahls, dargestellt durch die Gerade l, mit dieser Hallenseite, die die x-Achse an der Stelle $x = 9$ schneidet, bestimmen.

- ABS ist der $x = 9$ Ebene zugewandt
- Schnittpunkt von l und $x = 9$ entspricht Laser-Lichtquelle
- $l: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM} + r \cdot \overrightarrow{l}$

d) (1) ▶ **Punkte von E^* einzeichnen**

Die Angabe, dass alle Punkte eingezeichnet werden sollen, sagt aus, dass du die Schnittgeraden der Seitenflächen bzw. der Decke und des Bodens mit der Ebene E^* einzeichnen sollst.

Dafür benötigst du einige Punkte, die dir zum Teil schon mit F und G gegeben sind. Aus den Verbindungsstrecken dieser Punkte kannst du dann die Schnittgeraden bestimmen.

Du benötigst 2 Punkte, die in der Dachfläche liegen und gleichzeitig auf der Oberkante einer der Seitenflächen, und 2 Punkte, die in der Bodenfläche liegen und gleichzeitig auf der Unterkante der selben Seitenflächen liegen wie die Punkte in der Dachfläche.

- Punkte auf Bodenfläche und Dachfläche definieren
- Verbindungsstrecken der Punkte sind Schnitte der Ebene mit der Halle
- Schnitte mit Boden und Decke verlaufen parallel
- Schnitte mit den einzelnen Seitenwänden verlaufen parallel
- Schnitte mit der Vorder- und Rückwand verlaufen parallel

(2) ▶ **Schnittgerade g bestimmen**

Die Schnittgerade zweier Ebenen, von denen eine in Parameterform und eine in der Koordinatenform vorliegt, bestimmst du, indem du die Koordinaten aus der Parameterform in die Koordinatenform einsetzt.

Für zwei allgemeine Ebenen ergeben sich folgende Gleichungen.

$$E_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} o1 \\ o2 \\ o3 \end{pmatrix}$$

$E_2 : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$

$E_1 = E_2$

$$a \cdot (p1 + r \cdot q1 + s \cdot o1) + b \cdot (p2 + r \cdot q2 + s \cdot o2) + c \cdot (p3 + r \cdot q3 + s \cdot o3) = d$$

Löse dies nach einem der Parameter auf und setze diesen in die Parametergleichung ein.

So erhältst du deine Schnittgerade.

▶ **Entscheiden, ob $\overline{BS}$ auf g liegt**

Damit die Kante $\overline{BS}$ auf g liegt, müssen beide Punkte B und S auf g liegen. Es muss folglich gelten $B \in g$ und $S \in g$. Dies kannst du mittels Einsetzen prüfen. Es muss gelten $s_1 = s_2 = s_3$.