2.1 ▶ Bestimmung der Funktionsgleichung (6P)

Die gesuchte Funktion f ist eine Polynomfunktion 4. Grades. Die allgemeine Gleichung einer solchen Funktion lautet:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Zudem ist die gesuchte Funktion symmetrisch zur y-Achse. Dies bedeutet, dass in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten vorhanden sein dürfen. Diese eliminieren die negativen Vorzeichen bei allen x-Werten, sodass die y-Achse zur Spiegelachse der Kurve wird.
Daher kannst du die allgemeine Funktionsgleichung bereits anpassen:

$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Es bleiben noch die drei Unbekannten a, c und e. Um sie herauszufinden, werden drei Gleichungen mit diesen Parametern benötigt. Diese ergeben sich aus den drei Bedingungen im Aufgabentext:

1. Das Schaubild schneidet die y-Achse im Punkt $S(0\,|\,2)$.
2. Das Schaubild hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung $f'(1) = -4$.
3. Das Schaubild hat einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$

Die **erste Bedingung** sagt aus, dass S auf der Kurve liegt. Die Koordinaten von S kannst du als x- und $f(x)$-Werte in die Funktionsgleichung einsetzen.
Daraus ergibt sich die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 &= a\cdot 0^4 + c\cdot 0^2 + e \\ \text{(I)}\quad 2 &= e \end{aligned}$$

Die **zweite Bedingung** bezieht sich auf die Ableitung von f. Allgemein lautet diese:

$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

An der Stelle $x = 1$ gilt nun $f'(1) = -4$. Daraus folgt die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} -4 &= 4a\cdot 1^3 + 2c\cdot 1 \\ -4 &= 4a + 2c \qquad |:2 \\ \text{(II)}\quad -2 &= 2a + c \end{aligned}$$

Die **dritte Bedingung** bezieht sich wiederum auf die Ableitungsfunktion $f'(x)$. Die Ableitung einer Funktion an einer Extremstelle ist immer gleich Null. Wir setzen also $x = \sqrt{2}$ und $f'(x) = 0$ und erhalten die dritte Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 4a(\sqrt{2})^3 + 2c\sqrt{2} \\ 0 &= 4a\cdot 2\sqrt{2} + 2c\cdot\sqrt{2} \qquad |:2\sqrt{2} \\ \text{(III)}\quad 0 &= 4a + c \end{aligned}$$

Mit den drei Gleichungen liegt nun ein lineares Gleichungssystem vor, das es zu lösen gilt:

(I) $\boldsymbol{e} = \mathbf{2}$ — Ist bereits gelöst!

(II) $-2 = 2a + c$ — Löse nach c auf und setze in (III) ein:

(III) $0 = 4a + c$

(IIa) $-2 - 2a = c$

(IIIa) $0 = 4a + (-2 - 2a)$

(IIIa) $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$ — Setze in (IIa) ein:

(IIb) $-2 - 2 \cdot 2 = c$

(IIb) $\boldsymbol{c} = \mathbf{-4}$

Die Funktionsgleichung von f lautet somit:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$$

2.2.1▸ Nachweis, dass f_6 für $x > \sqrt{12}$ streng monoton wächst (4P)

Eine Funktion wächst innerhalb eines bestimmten Intervalls streng monoton, wenn deren Ableitung in diesem Intervall stets positiv ist.
Die Funktionsgleichung von f_6 lautet:

$$f_6(x) = \frac{1}{6}x^4 - 4x^2 + 7$$

Für die Ableitung $f_6'(x)$ ergibt sich daraus:

$$f_6'(x) = \frac{1}{6} \cdot 4x^3 - 8x = \frac{2}{3}x^3 - 8x$$

Der Nachweis kann auf zwei Wegen erfolgen:

▸▸ Lösungsweg A

Streng monotones Wachstum setzt voraus, dass das Vorzeichen der Steigung im betrachteten Intervall nicht wechseln darf. Ein solcher Wechsel findet immer an Extrempunkten statt. An diesen Punkten ist die Steigung gleich Null. Für das Intervall $]\sqrt{12}; \infty[$ darf die Ableitung von f_6 daher nie Null werden.
Setze dazu die Ableitungsfunktion $f_6'(x)$ gleich Null und löse nach x auf:

$0 = \frac{2}{3}x^3 - 8x$ — Klammere x aus!

$0 = x(\frac{2}{3}x^2 - 8)$ — Produktregel: Wenn ein Produkt Null wird, so muss einer der Faktoren gleich Null sein.

(I) $\mathbf{x_1} = \mathbf{0}$

(II) $0 = \frac{2}{3}x^2 - 8$ — $| +8 \; | \cdot \frac{3}{2}$

(II) $x^2 = 12$ — $| \sqrt{\;}$

(IIa) $\mathbf{x_2} = \boldsymbol{\sqrt{12}}$

(IIb) $\mathbf{x_3} = \boldsymbol{-\sqrt{12}}$

Keine der Lösungen befindet sich im betrachteten Intervall, die Steigung wird daher nie Null. Es findet also kein Vorzeichenwechsel der Steigung für $x > \sqrt{12}$ statt.
Nun muss an irgendeiner Stelle in diesem Intervall Wachstum nachgewiesen werden. Dafür muss die erste Ableitung positiv sein. Setze etwa $x = 6$ in die Ableitungsfunktion ein:

$$f_6'(6) = \frac{2}{3} \cdot 6^3 - 8 \cdot 6 = 144 - 48 = 96 > 0$$

Die Steigung ist im gegebenen Intervall stets positiv. Somit wächst f_6 streng monoton für $x > \sqrt{12}$.

►► Lösungsweg B

An der linken Grenze des Intervalls $x_2 = \sqrt{12}$ liegt möglicherweise ein Extrempunkt vor. Damit die Funktion für $x > \sqrt{12}$ wächst, muss es sich dabei um einen Tiefpunkt handeln, da die Funktion nach einem Tiefpunkt immer wächst. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet:

$$f_6''(x) > 0$$

Die zweite Ableitung von f_6 lautet:

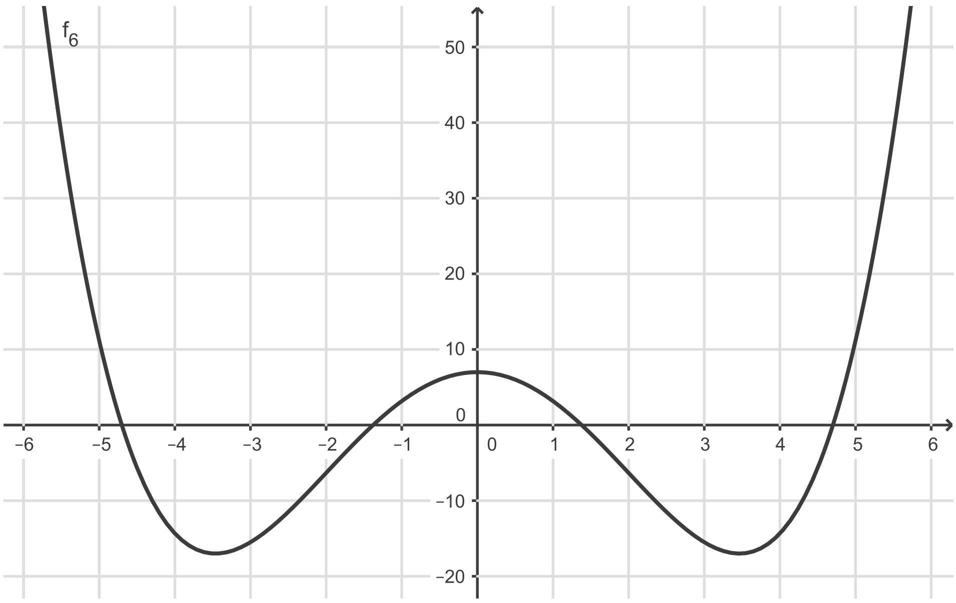
$$f_6''(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - 8$$
$$f_6''(x) = 2x^2 - 8$$

Setze nun $x_2 = \sqrt{12}$ in die Ungleichung ein und vereinfache:

$$f_6''(\sqrt{12}) = 2 \cdot (\sqrt{12})^2 - 8$$
$$f_6''(\sqrt{12}) = 24 - 8$$
$$f_6''(\sqrt{12}) = 16 > 0$$

Es handelt sich also eindeutig um einen Tiefpunkt, somit wächst die Funktion für $x > \sqrt{12}$ streng monoton.

2.2.2► **Schaubild der Funktion** (7P)



▸ Berechnung der Schnittpunkte der Wendetangenten

Wendetangenten sind Geraden, die die Wendepunkte eines Schaubildes tangieren. Um die Schnittpunkte der Wendetangenten von K_6 mit der x-Achse zu bestimmen, müssen zunächst die Koordinaten der Wendepunkte K_6 bestimmt werden. Danach stellt man mithilfe der jeweiligen Steigung in diesen Punkten die Geradengleichungen der Wendetangenten auf. Schließlich müssen diese noch durch Gleichsetzung des Funktionsterms mit Null mit der x-Achse geschnitten werden.

Es sind also drei Arbeitsschritte notwendig:

1. Schritt: Koordinaten der Wendepunkte bestimmen

Punkte, die relative Maxima oder Minima der Steigung einer Funktion darstellen, nennt man Wendepunkte. Im Maximum der Steigung ist die Steigungsänderung gleich Null. Die Steigungsänderung ist durch die zweite Ableitung der Funktion festgelegt. An Wendestellen wird also die zweite Ableitung gleich Null. In unserem Fall heißt diese notwendige Bedingung dann:

$$f_6''(x) = 0$$

Bestimmen wir zunächst die zweite Ableitung von f_6:

$$\begin{aligned}
f_6(x) &= \frac{1}{6}x^4 - 4x^2 + 7\\
f_6'(x) &= \frac{1}{6}\cdot 4x^3 - 4\cdot 2x\\
f_6'(x) &= \frac{2}{3}x^3 - 8x\\
f_6''(x) &= \frac{2}{3}\cdot 3x^2 - 8\\
\boldsymbol{f_6''}(x) &= \mathbf{2x^2 - 8}
\end{aligned}$$

Gemäß der notwendigen Bedingung für Wendepunkte, muss $f_6''(x)$ Null werden:

$$\begin{aligned}
f_6''(x) &= 0\\
2x^2 - 8 &= 0 \qquad \left|\cdot\frac{1}{2} + 4\right.\\
x^2 &= 4 \qquad \left|\sqrt{}\right.\\
x &= \pm\sqrt{4}\\
\boldsymbol{x_1} &= \mathbf{-2}\\
\boldsymbol{x_2} &= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

Es ergeben sich zwei Lösungen. Da im Aufgabentext eindeutig von zwei Wendestellen die Rede ist, müssen die beiden Lösungen nicht mehr auf die hinreichende Bedingung für Wendepunkte geprüft werden, da sie in jedem Fall Wendestellen sind.

Durch Einsetzen von x_1 und x_2 in die Funktionsgleichung von $f_6(x)$, ergeben sich für die y-Koordinaten der Wendepunkte:

$$f_6(-2) = \frac{1}{6}\cdot(-2)^4 - 4\cdot(-2)^2 + 7 = \frac{8}{3} - 9 = -\frac{19}{3}$$

$$f_6(2) = \frac{1}{6}\cdot 2^4 - 4\cdot 2^2 + 7 = \frac{16}{6} - 16 + 7 = \frac{8}{3} - 9 = -\frac{19}{3}$$

Die Koordinaten der Wendepunkte lauten damit $W_1(-2\,|-\frac{19}{3})$ und $W_2(2\,|-\frac{19}{3})$.

2. Schritt: Geradengleichungen der Wendetangenten bestimmen

Die allgemeine Form einer Tangentengleichung lautet

$t(x) = m \cdot x + c,$

wobei m die Steigung der Geraden und c den y-Achsenabschnitt darstellt. Die Steigung der Geraden ist durch die Steigungen in den Wendepunkten gegeben. Setze dazu x_1 und x_2 in die erste Ableitung von f_6 ein:

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \frac{2}{3}x^3 - 8x \\ f_6'(-2) &= \frac{2}{3}\cdot(-2)^3 - 8\cdot(-2) = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{32}{3} \\ f_6'(2) &= \frac{2}{3}\cdot 2^3 - 8\cdot 2 = \frac{16}{3} - 16 = -\frac{32}{3} \end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen lauten damit vorläufig:

$t_1(x) = \frac{32}{3}x + c_1$

$t_2(x) = -\frac{32}{3}x + c_2$

Um die Werte für c zu bestimmen, können wir die Koordinaten der Wendepunkte, die auf der jeweiligen Geraden liegen, für x und $t_1(x)$ bzw. $t_2(x)$ einsetzen und nach c_1 bzw. c_2 auflösen:

$$\begin{aligned} t_1(x) &= \frac{32}{3}x + c \\ -\frac{19}{3} &= \frac{32}{3}\cdot(-2) + c \\ -\frac{19}{3} &= -\frac{64}{3} + c \qquad \Big|+\frac{64}{3} \\ c_1 &= -\frac{19}{3} + \frac{64}{3} \\ \boldsymbol{c_1} &= \frac{45}{3} = \mathbf{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2(x) &= -\frac{32}{3}x + c_2 \\ -\frac{19}{3} &= -\frac{32}{3}\cdot 2 + c_2 \\ -\frac{19}{3} &= -\frac{64}{3} + c_2 \qquad \Big|+\frac{64}{3} \\ c_2 &= -\frac{19}{3} + \frac{64}{3} \\ \boldsymbol{c_2} &= \frac{45}{3} = \mathbf{15} \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Wendetangenten lauten damit:

$t_1(x) = \frac{32}{3}x + 15$

$t_2(x) = -\frac{32}{3}x + 15$

3. Schritt: Schnittpunkte der Wendetangenten mit der x-Achse bestimmen

Im Schnittpunkt mit der x-Achse wird der Funktionswert Null. Es gilt daher:

$t_1(x) = 0$ und $t_2(x) = 0$

Löse die Gleichungen nach x auf:

$$
\begin{aligned}
t_1(x_{01}) &= 0 \\
\frac{32}{3}x_{01} + 15 &= 0 \qquad \mid -15 \mid \cdot \frac{3}{32} \\
x_{01} &= -\frac{3}{32} \cdot 15 \\
\mathbf{x_{01}} &= -\frac{\mathbf{45}}{\mathbf{32}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_2(x_{02}) &= 0 \\
\frac{32}{3}x_{02} + 15 &= 0 \qquad \mid -15 \mid \cdot \frac{3}{32} \\
x_{02} &= \frac{3}{32} \cdot 15 \\
\mathbf{x_{02}} &= \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{32}}
\end{aligned}
$$

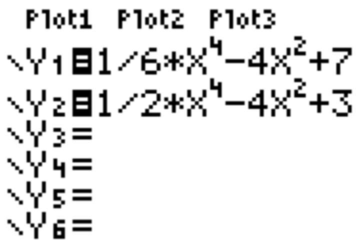
Die y-Koordinaten von Schnittpunkten mit der y-Achse sind immer gleich Null. Die Koordinaten der Schnittpunkte der Wendetangenete mit der x-Achse lauten daher:

$S_1(-\frac{45}{32} \mid 0)$ und $S_2(\frac{45}{32} \mid 0)$.

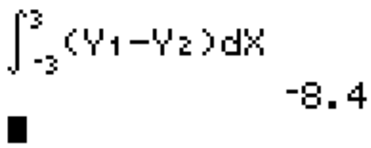
2.2.3▶ **Berechnung der Integrale** (6P)

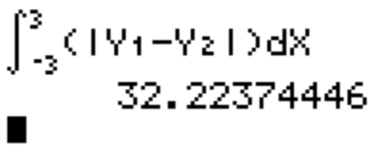
Die Berechnung der Integrale mithilfe des GTR erfolgt über zwei Arbeitsschritte:

1. Eingabe der Funktionsgleichungen in den $\boxed{\text{Y=}}$-Editor.



2. Bestimmung des Integrals über die Befehlskette $\boxed{\text{MATH} \rightarrow 9}$. Die Funktionsgleichungen setzt du über $\boxed{\text{VARS} \rightarrow \text{Y-VARS}}$ in das Integral ein. Einen Betrag setzt du über $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{NUM} \rightarrow 1}$.





Für die Integrale (1) und (2) ergibt sich daraus:

$\displaystyle\int_{-3}^{3} f_6(x) - f_2(x)\,\mathrm{d}x = -8,4$ und

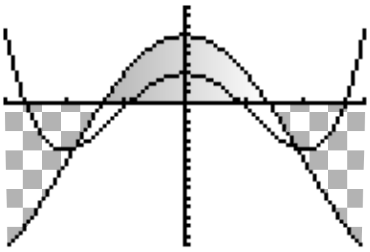
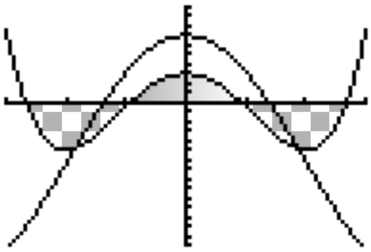
$\displaystyle\int_{-3}^{3} |f_6(x) - f_2(x)|\,\mathrm{d}x \approx 32,22.$

▶ **Geometrische Bedeutung**

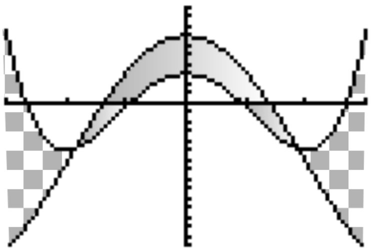
Integrale innerhalb bestimmter Intervalle stellen immer den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse dar. Dabei ist das Integral positiv, wenn sich die Kurve im positiven y-Bereich befindet und negativ, wenn sie im negativen y-Bereich liegt. Geometrisch ausgedrückt: Befindet die Fläche über der x-Achse, wird sie als positiv betrachtet, befindet sie sich darunter, als negativ.

Die geometrische Bedeutung der Integrale sagt daher etwas darüber aus, wie groß der Inhalt der durch die Integration abgedeckten Flächen ist. Um festzustellen, welche diese sind, ist es ratsam die Graphen der Funktionen im GTR in ein gemeinsames Schaubild zu zeichnen.

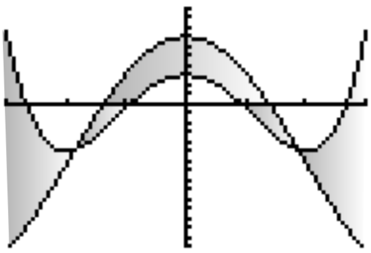
Integriert man f_6 (links) und f_2 (rechts) dann jeweils für sich, ergeben sich positiv gezählte Flächen (Farbverlauf) und negativ gezählte Flächen (Karos):

Zieht man nun wie im Fall (1) diese Flächen voneinander ab, ergibt sich ein neues Muster, wobei eine innere Fläche entsteht, die positiv gezählt wird und zwei äußere Flächen, die negativ gezählt werden. Da das Integral insgesamt negativ ist, sind die äußeren Flächen zusammen größer als die innere Fläche und zwar genau um $8,4$ Flächeneinheiten.



Wird aber wie in Fall (2) der Betrag genommen, werden alle Flächen positiv gezählt. Das Integral beschreibt somit die Gesamtfläche, die zwischen den Kurven eingeschlossen ist:



2.2.4▶ **Gleichung der Ortskurve der Tiefpunkte von K_t bestimmen** (7P)

Die Kurve, auf der die Tiefpunkte aller K_t liegen, wird durch ihre Koordinaten in Abhängigkeit von t bestimmt. Aus den Koordinaten ergibt sich durch die Eliminierung des Parameters t eine von t unabhängige Gleichung der Ortskurve.

Tiefpunkte sind Extrempunkte der Kurve. Die Steigung in Tiefpunkten ist gleich Null ist. Die Steigung ist durch die erste Ableitung der Funktion definiert. Die notwendige Bedingung für Tiefpunkte lautet daher:

$f_t'(x) = 0$

Zudem wechselt die Steigung in Tiefpunkten von negativ nach positiv, die Änderungsrate der Steigung ist daher positiv. Die Änderungsrate der Steigung ist dabei durch die zweite Ableitung der Funktion definiert. Die hinreichende Bedingung lautet somit:

$f_t''(x) > 0$

Bestimme zunächst die erste und zweite Ableitung von f_t.

$$f_t(x) = \frac{1}{t}x^4 - 4x^2 + t + 1$$
$$f_t'(x) = \frac{1}{t} \cdot 4x^3 - 4 \cdot 2x$$
$$\boldsymbol{f_t'(x) = \frac{4}{t}x^3 - 8x}$$
$$f_t''(x) = \frac{4}{t} \cdot 3x^2 - 8$$
$$\boldsymbol{f_t''}(x) = \boldsymbol{\frac{12}{t}x^2 - 8}$$

Setze in die erste Gleichung ein und löse nach x auf:

$$f_t'(x) = 0$$
$$\frac{4}{t}x^3 - 8x = 0 \qquad \text{ausklammern!}$$
$$x\left(\frac{4}{t}x^2 - 8\right) = 0 \qquad \text{Produktregel: Wenn ein Produkt Null wird, so muss einer der Faktoren gleich Null sein}$$

(I) $\boldsymbol{x_1 = 0}$

(II) $\frac{4}{t}x^2 - 8 = 0 \qquad | +8 \ | \cdot\frac{t}{4}$

(II) $x^2 = 2t \qquad | \sqrt{}$

(IIa) $\boldsymbol{x_2 = \sqrt{2t}}$

(IIb) $\boldsymbol{x_3 = -\sqrt{2t}}$

Es ergeben sich drei Lösungen - $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2t}$ und $x_3 = -\sqrt{2t}$. Setze diese in die zweite Ableitung ein und prüfe, ob die hinreichende Bedingung für Tiefpunkte erfüllt wird:

$f_t''(x) > 0$

$$f_t''(x_1) = \frac{12}{t} \cdot 0^2 - 8 = -8 < 0 \qquad \text{Kein Tiefpunkt!}$$
$$f_t''(x_2) = \frac{12}{t} \cdot \left(\sqrt{2t}\right)^2 - 8 = 24 > 0 \qquad \text{Tiefpunkt!}$$
$$f_t''(x_3) = \frac{12}{t} \cdot \left(-\sqrt{2t}\right)^2 - 8 = 24 > 0 \qquad \text{Tiefpunkt!}$$

K_t besitzt also zwei Tiefpunkte T_1 und T_2. Setze $x_2 = \sqrt{2t}$ und $x_3 = -\sqrt{2t}$ in $f_t(x)$ ein und bestimme die y-Koordinaten der beiden Tiefpunkte:

$$f_t(x) = \frac{1}{t}x^4 - 4x^2 + t + 1$$
$$f_t(\sqrt{2t}) = \frac{1}{t}\cdot\left(\sqrt{2t}\right)^4 - 4\cdot\left(\sqrt{2t}\right)^2 + t + 1 = 4t - 8t + t + 1 = -3t + 1$$
$$f_t(\sqrt{2t}) = \frac{1}{t}\cdot\left(-\sqrt{2t}\right)^4 - 4\cdot\left(-\sqrt{2t}\right)^2 + t + 1 = 4t - 8t + t + 1 = -3t + 1$$

Die Koordinaten aller Tiefpunkte in Abhängigkeit von x lauten also:

$T_1(\sqrt{2t} \mid -3t+1)$ und $T_2(-\sqrt{2t} \mid -3t+1)$

Die Gleichungen der Ortskurven für T_1 und T_2 ergeben sich aus den Gleichungen für x und y, die man den Koordinaten der Tiefpunkte entnehmen kann. Für T_1 lauten diese:

(I) $x = \sqrt{2t}$
(II) $y = -3t + 1$

Um t zu eliminieren, kann (I) nach t aufgelöst werden. Durch Einsetzen des Ergebnisses für t in (II), wird der Parameter aus der Gleichung entfernt:

(I)	$x = \sqrt{2t}$	$\mid\ ^2$
(I)	$x^2 = 2t$	$\mid \cdot\frac{1}{2}$
(I)	$t = \frac{1}{2}x^2$	(I) in (II):
(IIa)	$y = -3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 1$	
(IIa)	$\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x^2 + 1}$	

Die Gleichung der Ortskurve von T_1 lautet somit $y = -\frac{3}{2}x^2 + 1$. Bestimme nun analog die Gleichung der Ortskurve von T_2. Die Gleichungen für x und y lauten hierbei:

(I) $x = -\sqrt{2t}$
(II) $y = -3t + 1$

Um t zu eliminieren, kann (I) wieder nach t aufgelöst werden. Durch Einsetzen des Ergebnisses für t in (II), wird der Parameter aus der Gleichung entfernt:

(I)	$x = -\sqrt{2t}$	$\mid\ ^2$
(I)	$x^2 = 2t$	$\mid \cdot\frac{1}{2}$
(I)	$t = \frac{1}{2}x^2$	(I) in (II):
(IIa)	$y = -3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 1$	
(IIa)	$\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x^2 + 1}$	

Die Gleichung der Ortskurve von T_2 lautet somit $y = -\frac{3}{2}x^2 + 1$. T_1 und T_2 liegen damit auf einer gemeinsamen Kurve.
Die Gleichung der Ortskurve aller Tiefpunkte von K_t lautet damit:

$$\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x^2 + 1}$$

2.3.1▸ Entstehung von G_a aus dem Schaubild von h (4P)

g_a ist eine trigonometrische, periodische Funktion, ebenso wie h. g_a entsteht dabei aus h durch den Koeffizienten a vor dem Cosinus, den Faktor 2 im Cosinus und den Parameter $+4$. Diese drei Konstanten lassen G_a aus dem Schaubild von h entstehen.

Der Koeffizient a bestimmt die Amplitude A des Schaubilds der Cosinus-Funktion. Für die Amplitude gilt dabei:

$$\boldsymbol{A = a}$$

Das Schaubild wird dadurch entlang der y-Achse gestreckt oder gestaucht.
Der Faktor 2 nimmt Einfluss auf die Periode der Funktion. Allgemein gilt für die Periode p einer trigonometrischen Funktion: $p = \frac{2\pi}{k}$, wobei k der Faktor bei x im Cosinus ist. Die Periode von g_a lautet damit:

$$\boldsymbol{p = \frac{2\pi}{2} = \pi}$$

Die Kurve wird also entlang der x-Achse gestaucht.
Der Parameter $+4$ verschiebt schließlich das Schaubild der Funktion entlang der **y-Achse um 4 Einheiten nach oben**.

▸ Angabe der Werte für a, für die G_a im positiven y-Bereich verläuft

Damit das Schaubild im positiven y-Bereich verläuft, muss allgemein gelten:

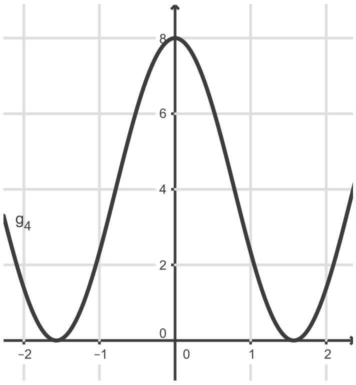
$$g_a(x) > 0$$

Die Ausdehnung des Schaubildes einer trigonometrischen Funktion in y-Richtung ist abhängig von seiner y-Achsenverschiebung und der Amplitude A. Für G_a beträgt die y-Achsenverschiebung $+4$, dies bedeutet: Wenn der Cosinus Null wird, befindet sich die Kurve bei $y = 4$.
Der Cosinus kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Bei -1 ist die maximale negative Elongation des Schaubildes erreicht. Diese ist gleich der Amplitude $A = a$. Die Amplitude muss also kleiner 4 sein, da die Kurve sich sonst im negativen y-Bereich wiederfindet. a darf also nur Werte kleiner 4 annehmen. Und da a per Defintion nur Werte größer Null annehmen darf, gilt:

$$\boldsymbol{0 < a < 4}.$$

2.3.2▸ Bestimmung des Inhalts der eingeschlossenen Fläche (4P)

Um den Inhalt der Fläche, die G_4 mit der x-Achse im Intervall $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ einschließt, zu bestimmen, muss das Integral von g_4 in diesem Intervall gebildet werden. Da der Flächeninhalt *exakt* bestimmt werden soll, sind Näherungen mit dem GTR nicht zulässig.
Zunächst ist daher eine Skizze sinnvoll:



Aus dem Schaubild wird sichtbar, dass die Intervallgrenzen dort liegen, wo die Kurve die x-Achse berührt. Dies bedeutet, dass die gesamte zu bestimmende Fläche im positiven y-Bereich liegt. Daher kann im kompletten Intervall durchintergriert werden. Für den Flächeninhalt ergibt sich dadurch:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos(2x)+4)dx \\
&= [2\sin(2x)+4x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+4\cdot\frac{\pi}{2}-\left(2\sin\left(2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+4\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad | \ \sin(\pm\pi)=0 \\
&= 0+2\pi-(0-2\pi) \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

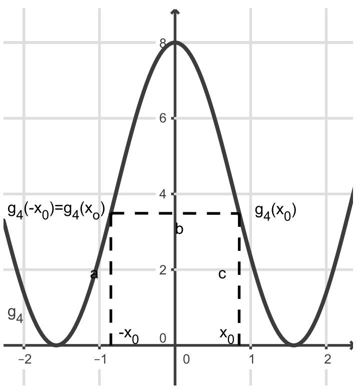
Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt somit 4π FE.

2.3.3▶ **Nachweis des Verhältnisses der Flächeninhalte** (7P)

Dem Flächenstück aus 2.3.3 werden Rechtecke einbeschrieben, deren Umfang und Flächeninhalt bestimmt werden muss. Zuerst müssen die Rechtecke mit dem jeweils kleinsten und größten Umfang bestimmt werden, dann soll das Verhältnis ihrer Flächeninhalte berechnet werden. Dazu muss der Umfang als Funktion in Abhängigkeit von x dargestellt werden.

1. Schritt: Umfang als Funktion von x darstellen

Die Grundseite der Rechtecke liegt auf der x-Achse und einer der Eckpunkte liegt auf der Kurve im ersten Quadranten. Durch die y-Achsensymmetrie des Schaubildes gilt für ein solches Rechteck somit folgendes Schaubild:



Der Umfang eines solchen Rechtecks setzt sich aus den Längen aller Seiten zusammen. Die Länge entspricht dem Doppelten des Betrags der x-Koordinate des Eckpunktes. Die Breite ist gleich dem Betrag der y-Koordinate des Eckpunktes. Für den Umfang U gilt damit:

$U = 2 \cdot \text{Länge} + 2 \cdot \text{Breite} = 2 \cdot |2 \cdot x_0| + 2 \cdot |g_4(x_0)|$

Die Gleichung kann nun als eine Funktion $U(x)$ dargestellt werden. Da sich die Werte für x_0 und $g_4(x_0)$ immer im positiven Bereich bewegen, können die Betragsstriche weggelassen werden. Setze für $g_4(x_0)$ den Funktionsterm von g_4 ein und vereinfache:

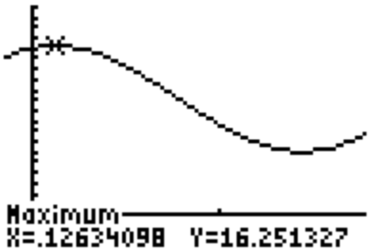
$$U(x) = 4 \cdot x_0 + 2 \cdot (4\cos(2x_0) + 4)$$
$$U(x) = 4 \cdot x_0 + 8\cos(2x_0) + 8$$

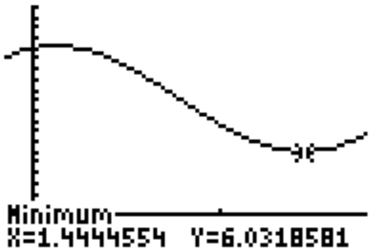
2. Schritt: Die Rechtecke mit kleinstem bzw. größtem Umfang bestimmen

Nun soll jeweils das Rechteck mit dem kleinsten und größten Umfang ermittelt werden. U soll also jeweils minimal bzw. maximal werden. Es sind also die absoluten Minima und Maxima des Schaubildes von U gesucht.

Gib dazu den Funktionsterm von U in den $\boxed{\text{Y=}}$-Editor ein und zeichne ein Schaubild von U im positiven Bereich des Flächenstücks, da der Definitionsbereich einerseits durch das Flächenstück selbst und andererseits durch die Lage des Eckpunktes im ersten Quadranten begrenzt ist.

Bestimme dann über die Befehlsfolge $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{CALC} \rightarrow 4}$ den Hochpunkt der Kurve und über die Befehlsfolge $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{CALC} \rightarrow 3}$ den Tiefpunkt:





Da die relativen Extremstellen auch die absoluten sind, wird $U(x)$ an den Stellen $x_{0max} = 0,126$ und $x_{0min} = 1,444$ maximal bzw. minimal. Dies bedeutet, dass die Eckpunkte der Rechtecke mit dem größten bzw. kleinsten Umfang die x-Koordinaten x_{0max} und x_{0min} besitzen.

3. Schritt: Verhältnis der Flächeninhalte der Rechtecke bestimmen

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist das Produkt der Länge und der Breite. Die Länge der Grundseite beträgt aufgrund der Symmetrie das Doppelte des Betrags der x-Koordinate des jeweiligen Eckpunktes. Die Breite ist durch den Betrag der y-Koordinaten des Eckpunktes gegeben. Für den Flächeninhalt eines solchen Rechtecks ergibt sich daher:

$A = 2x_0 \cdot g_4(x_0) = 2x_0 \cdot (4 \cdot \cos(2x) + 4)$

Bestimme damit die Flächeninhalte der beiden Rechtecke:

$$A_{0max} = 2 \cdot 0,126 \cdot (4\cos(2 \cdot 0,126) + 4) \approx 1,984$$
$$A_{0min} = 2 \cdot 1,444 \cdot (4\cos(2 \cdot 1,444) + 4) \approx 0,369$$

Um das Verhältnis zu ermitteln, wird der Quotient gebildet:

$$\frac{A_{0max}}{A_{0min}} = \frac{1,984}{0,369} \approx 5,38$$

Das Verhältnis der beiden Flächeninhalte beträgt etwa 5. Der Nachweis ist damit erbracht.