a) (1) **► Graphen von f im Sachzusammenhang beschreiben** (11P)

Die Funktion f beschreibt die Höhe der Buche in Abhängigkeit von der Zeit. Betrachte den Graphen in Abbildung 1: Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $(0 \mid 0,3)$, steigt dann sehr schnell an. Der Graph besitzt einen Wendepunkt etwa bei $t = 35$; anschließend steigt der Graph langsamer an, bis er sich für große Werte von t einer waagerechten Asymptote annähert. Du kannst auch die Koordinaten einiger Punkte erkennen: $(40 \mid 12)$, $(60 \mid 17,5)$, $(100 \mid 27)$, $(160 \mid 32,5)$.

Überlege, wie du diesen Verlauf interpretieren kannst. Beachte dabei, dass auf der y-Achse die Höhe der Buche und auf der t-Achse die Zeit in Jahren abgetragen wird. Außerdem beschreibt die Steigung des Graphen die Änderungsrate des Wachstums, also die Wachstumsgeschwindigkeit.

Der Punkt $(0 \mid 0,3)$ stimmt mit der Größe der Buche zum Zeitpunkt der Pflanzung an: Zu Beginn ist die Buche 0,3m hoch. Anschließend nimmt die Größe der Buche stark zu; nach etwa 35 Jahren erreicht sie die maximale Wachstumsgeschwindigkeit. Anschließend lässt die Wachstumsgeschwindigkeit langsam wieder nach. Nach 40 Jahren hat sie eine Höhe von etwa 12 m, nach 60 Jahren eine Höhe von etwa 17,5 m, nach 100 Jahren eine Höhe von etwa 27 m und nach 160 Jahren eine Höhe von etwa 32,5m. Nach etwa 200 Jahren verändert sich die Höhe jährlich nur noch geringfügig: Die Buche hat fast ihre maximale Höhe erreicht und nähert sich dieser langsam an.

(2) **► $f(20)$ berechnen und interpretieren**

Setze $t = 20$ in die Funktionsgleichung von f ein. Beachte bei der Interpretation, dass die Funktionswerte von f die Höhe der Buche zum Zeitpunkt t angibt. Alternativ kannst du den Funktionswert auch mit dem GTR berechnen.

$$\begin{aligned} f(20) &= 0,3 + 35 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0,02\cdot 20}\right)^2 \\ &= 0,3 + 35 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0,4})^2 \approx 4,1 \end{aligned}$$

Es ergibt sich $f(20) \approx 4,1$.

Im Sachzusammenhang heißt das: Nach 20 Jahren ist die Buche etwa 4,1 m hoch.

(3) **► Maximale Höhe der Buche begründen**

In der Modellierung wird die Höhe der Buche durch die Funktion f beschrieben. Die Buche kann nicht höher als 35,3 m hoch werden, wenn die Funktionswerte von f niemals höher als 35,3 m werden.

Du weißt aus dem Graphen, dass sich der Graph von f für $t \to \infty$ einer waagerechten Asymptote annähert und damit vermutlich einen Grenzwert besitzt. Untersuche also das Verhalten der Funktionswerte von f für $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{t\to\infty} \left(35 + 0,3 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0,04t}\right)^2\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(35 + 0,3 \cdot \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{0,04t}}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Für große Werte von t nimmt der Wert $\mathrm{e}^{0,04t}$ sehr große Werte an. Der Bruch $\frac{1}{\mathrm{e}^{0,04t}}$ geht also für große Werte von t gegen Null:

$$= \lim_{t\to\infty}\left(35+0,3\cdot\left(1-\underbrace{e^{-0,04t}}_{\to 0}\right)^2\right)$$
$$= 35+0,3\cdot(1-0)^2$$
$$= 35+0,3 = 35,3$$

Damit hast du gezeigt, dass sich der Graph von f für große Werte von f der Asymptote $y = 35,3$ annähert. Die Funktionswerte nähern sich für große Werte von t also immer weiter dem Wert $35,3$ an, erreichen ihn aber nie ganz.

Im Sachzusammenhang interpretiert heißt das: Die Buche wächst immer weiter und nähert sich der Höhe 35,3 m immer näher an, erreicht sie aber nie ganz. Sie kann also nicht höher als 35,3 m werden.

b) ► **Zeitpunkt des stärksten Wachstums berechnen** (14P)

Die Funktion f beschreibt die Höhe der Buche. Die erste Ableitung f' beschreibt die Änderungs- rate des Höhenwachstums, also die Wachstumsgeschwindigkeit. Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die Buche am stärksten wächst, also die maximale Wachstumsgeschwindigkeit.

Berechne deshalb das Maximum von f' . Dies ist zugleich die Wendestelle von f.

Ein Maximum t_M von f' liegt dann vor, wenn die notwendige und die hinreichende Bedingung erfüllt sind:

- $f''(t_M) = 0$
- $f'''(t_M) < 0$; alternativ Vorzeichenwechsel-Kriterium

Bilde zunächst die ersten drei Ableitungen von f nach der Kettenregel, löse dann die Gleichung $f''(t) = 0$ und setze die potentielle Wendestelle in f''' ein. Zur Bestimmung der Ableitungen bietet es sich an, von der zweiten, alternativen Form des Funktionsterms von f auszugehen.

1. Schritt: Ableitungen bilden

$$\begin{aligned} f'(t) &= 35\cdot(-2\cdot(-0,02)\cdot e^{-0,02t}+(-0,04)\cdot e^{-0,04t}) \\ &= 35\cdot(0,04\cdot e^{-0,02t}-0,04\cdot e^{-0,04t}) && \mid 0,04 \text{ ausklammern} \\ &= 1,4\cdot(e^{-0,02t}-e^{-0,04t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= 1,4\cdot(-0,02e^{-0,02t}-(-0,04)e^{-0,04t}) && \mid 0,02 \text{ ausklammern} \\ &= 1,4\cdot 0,02(-e^{-0,02t}+2e^{-0,04t}) \\ &= 0,028(-e^{-0,02t}+2e^{-0,04t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(t) &= 0,028\cdot(-(-0,02)e^{-0,02t}+2\cdot(-0,04)e^{-0,04t}) && \mid (-0,02) \text{ ausklammern} \\ &= 0,028\cdot 0,02\cdot(e^{-0,02t}-2\cdot 2e^{-0,04t}) \\ &= 0,00056\cdot(e^{-0,02t}-4e^{-0,04t}) \end{aligned}$$

2. Schritt: Notwendiges Kriterium prüfen

Setze $f''(t) = 0$ und löse nach t auf.

$$\begin{aligned}
0{,}028\cdot\left(-\mathrm{e}^{-0{,}02t}+2\mathrm{e}^{-0{,}04t}\right)&=0 && \mid :0{,}028\\
-\mathrm{e}^{-0{,}02t}+2\mathrm{e}^{-0{,}04t}&=0\\
-\mathrm{e}^{-0{,}02t}+2\mathrm{e}^{-2\cdot 0{,}02t}&=0\\
-\mathrm{e}^{-0{,}02t}+2\mathrm{e}^{-2\cdot 0{,}02t}&=0 && \text{Potenzgesetze}\\
-\mathrm{e}^{-0{,}02t}+2\left(\mathrm{e}^{-0{,}02t}\right)^2&=0 && \mid\ \mathrm{e}^{-0{,}02t}\ \text{ausklammern}\\
0{,}02t\cdot\left(-1+2\mathrm{e}^{-0{,}02t}\right)&=0
\end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. DA der Ausdruck $\mathrm{e}^{-0{,}02t}$ niemals Null werden kann, genügt es, den zweiten Faktor zu betrachten.

$$\begin{aligned}
-1+2\mathrm{e}^{-0{,}02t}&=0 && \mid\ +1\\
2\mathrm{e}^{-0{,}02t}&=1 && \mid :2\\
\mathrm{e}^{-0{,}02t}&=\frac{1}{2} && \mid\ \ln(\ )\\
-0{,}02t&=\ln\left(\frac{1}{2}\right) && \mid :(-0{,}02)\\
t&=\frac{\ln(\frac{1}{2})}{-0{,}02}\approx 34{,}66
\end{aligned}$$

Es ergibt sich die potentielle Wendestelle bei $t = 34{,}66$.

3. Schritt: Hinreichendes Kriterium prüfen

Berechne $f'''(34{,}66)$:

$f'''(34{,}66) = 0{,}00056\cdot(\mathrm{e}^{-0{,}02\cdot 34{,}66} - 4\mathrm{e}^{-0{,}04\cdot 34{,}66}) \approx -0{,}00028 < 0$

Da $f'''(34{,}66) < 0$, liegt an der Stelle $t = 34{,}66$ ein lokales Maximum der ersten Ableitung f' vor. Damit kannst du sagen: Nach etwa 34,66 Jahren wächst die Buche am stärksten.

Alternativ kannst du die Wendestelle auch über das Vorzeichenwechselkriterium nachweisen. Zeige dazu, dass das Vorzeichen von f'' an der Stelle $t = 34{,}66$ von $+$ nach $-$ wechselt:

$f''(34) = 0{,}028\cdot\left(-\mathrm{e}^{-0{,}02\cdot 34}+2\mathrm{e}^{-0{,}04\cdot 34}\right)\approx 0{,}00019$

$f''(35) = 0{,}028\cdot\left(-\mathrm{e}^{-0{,}02\cdot 35}+2\mathrm{e}^{-0{,}04\cdot 35}\right)\approx -0{,}000095$

Damit ist das Maximum $t = 34{,}66$ von f' mit dem Vorzeichenwechselkriterium nachgewiesen. Du kannst also sagen: Nach etwa 34,66 Jahren wächst die Buche am stärksten.

c) (1) ► **Zeitlichen Verlauf im Vergleich beschreiben** (15P)

Betrachte die Unterschiede und die Gemeinsamkeiten der beiden Graphen: Du kannst zum Beispiel die Lage des Hochpunktes und die Steigung der Graphen im Sachzusammenhang vergleichend interpretieren.

Es fällt auf, dass der Graph der Funktion f' durchweg schneller ansteigt und auch im Hochpunkt einen größeren Funktionswert annimmt. Die Hochpunkte liegen an der gleichen Stelle $t \approx 35$ vor.

Du kannst also sagen: Die Buche, deren Wachstumsgeschwindigkeit durch f' beschrieben wird, besitzt durchweg eine höhere Wachstumsgeschwindigkeit. Nach etwa 35 Jahren ist die Wachstumsgeschwindigkeit bei beiden Buchen maximal; auch hier wächst die Buche von f schneller.

Je älter die Buchen werden, desto kleiner wird die Wachstumsgeschwindigkeit. Die Buchen wachsen mit zunehmendem Alter also langsamer,wobei auch hier die Geschwindigkeit der Buche von f durchweg größer ist.

Da die beiden Buchen zum Zeitpunkt der Pflanzung je 0,3 m hoch sind und die Buche von f schneller wächst, wird sie insgesamt auch eine größere maximale Höhe annehmen.

(2) ► **Gleiche Stelle des Maximums nachweisen**

Du musst nicht das Maximum von g' berechnen, sondern kannst die Aufgabe lösen, indem du die beiden Funktionsterme von f' und g' miteinander vergleichst.

$$f'(t) = 1,4 \cdot (\mathrm{e}^{-0,02t} - \mathrm{e}^{-0,04t}) \quad \text{und} \quad g'(t) = 1,1 \cdot (\mathrm{e}^{-0,02t} - \mathrm{e}^{-0,04t})$$

Bis auf den Faktor 1,4 bzw. 1,1 unterscheiden sich die beiden Funktionsterme nicht. Somit entsteht der Graph von f' durch Streckung aus dem Graphen von g'.

Bei der Streckung werden nur die y-Koordinaten verändert, die t-Koordinaten der Nullstellen, Hochpunkte, Wendepunkte etc. verändern sich hierdurch nicht. Deshalb haben die Funktionen f' und g' an derselben Stelle ein Maximum.

(3) ► **Größere Höhe der ersten Buche nachweisen**

Die Funktionen f' bzw. g' beschreiben die Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen. Die Wachstumsgeschwindigkeit ist die Änderungsrate der Höhe der Buchen. Also wird die Höhe der Buchen durch die Fläche beschrieben, die vom Graphen von f' bzw. g' und der t-Achse eingeschlossen wird.

Die beiden Buchen sind zum Zeitpunkt der Pflanzung $t = 0$ beide 0,3 m hoch. Zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ hat also diejenige Buche eine größere Höhe, für die die Fläche unter dem entsprechenden Graphen größer ist.

Du siehst, dass die Fläche unter dem Graphen von f' immer größer ist als die unter dem Graphen von g'. Damit ist die erste Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ größer als die zweite Buche.

d) (1) ► **Stammfunktion von g' nachweisen** (10P)

Die Funktion h ist eine Stammfunktion g', wenn gilt:
$h'(t) = g'(t)$.

Leite also h ab.

$$\begin{aligned} h'(t) &= 27,5 \cdot (-0,04 \cdot \mathrm{e}^{-0,04t} - 2 \cdot (-0,02)\mathrm{e}^{-0,02t}) \\ &= 27,5 \cdot (-0,04 \cdot \mathrm{e}^{-0,04t} + 0,04\mathrm{e}^{-0,02t}) \qquad |: 0,04 \\ &= 1,1 \cdot (\mathrm{e}^{-0,02t} - \mathrm{e}^{-0,04t}) \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Funktion h eine Stammfunktion von g ist.

(2) ► **Behauptung prüfen**

Die Höhe der ersten bzw. der zweiten Buche wird beschrieben durch die Funktion f. Über die zweite Buche weißt du nur, dass die Funktion g' ihre Wachstumsgeschwindigkeit beschreibt und dass h eine Stammfunktion von g' ist. Es gibt aber unendlich viele Stammfunktionen. Bestimme daher zunächst diejenige Stammfunktion, die das Wachstum der zweiten Buche beschreibt; beachte dabei, dass die Buche zum Zeitpunkt $t = 0$ genau 0,3 m hoch ist.

Bestimme dann mit Hilfe der beiden Funktionen g und h die Höhe der beiden Buchen nach 50 Jahren und berechne die Differenz der beiden Werte.

1. Schritt: Funktion für die Höhe der zweiten Buche bestimmen

Allgemein kann eine Stammfunktion von g' so formuliert werden:
$h(t) = 27,5 \cdot (\mathrm{e}^{-0,04t} - 2\mathrm{e}^{-0,02t}) + C$
Für eine Funktion, die das Wachstum der zweiten Buche beschreibt,muss gelten: $h(0) = 0,3$.
Löse diese Gleichung nach C auf:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0,3 \\ 27,5 \cdot (\mathrm{e}^{-0,04\cdot 0} - 2\mathrm{e}^{-0,02\cdot 0}) + C &= 0,3 \\ 27,5 \cdot (\mathrm{e}^{0} - 2\mathrm{e}^{0}) + C &= 0,3 && \mid \mathrm{e}^0 = 1 \\ 27,5 \cdot (1-2) + C &= 0,3 \\ -27,5 + C &= 0,3 && \mid +27,5 \\ C &= 27,8 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Höhe der zweiten Buche die Funktion
$h(t) = 27,5 \cdot (\mathrm{e}^{-0,04t} - 2\mathrm{e}^{-0,02t}) + 27,8$

2. Schritt: Differenz der Höhen berechnen

Untersucht werden soll die Höhe der Buchen nach 50 Jahren.Bestimme also $f(50)$ und $h(50)$ und berechne die Differenz der beiden Werte.

$$\begin{aligned} f(50) &= 0,3 + 35 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0,02\cdot 50}\right)^2 \\ &= 0,3 + 35\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)^2 \approx 14,29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(50) &= 27,5 \cdot \left(\mathrm{e}^{-0,04\cdot 50} - 2\mathrm{e}^{-0,02\cdot 50}\right) + 27,8 \\ &= 27,5 \cdot \left(\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}\right) + 27,8 \approx 11,29 \end{aligned}$$

Für die Differenz ergibt sich dann:
$14,29 - 11,29 = 3$
Da der Höhenunterschied mit etwa 3 m kleiner ist als 3,50 m, ist die Behauptung widerlegt.