a) ▸ Größtmöglichen Definitionsbereich bestimmen

In der ersten Aufgabe ist eine Funktionenschar gegeben, die durch die Gleichung

$$f_k(x)=\frac{10x-k}{x^2}$$

dargestellt wird. Der Parameter k gehört zur Menge der rationalen Zahlen und ist echt größer als Null. Du sollst den Definitionsbereich und die Nullstellen angeben, verschiedene Grenzwerte berechnen, die Gleichungen aller Asymptoten aufstellen, sowie die Extrempunkte und deren Ortskurve bestimmen.

Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ gibt alle Werte an, für die die Funktion definiert ist, die man also in den Funktionsterm einsetzen darf.
Nicht definiert sind Funktionen dann, wenn...

- ...der Nenner der Funktion den Wert 0 annimmt.
- ...der Radikand unter einer Wurzel einen negativen Wert hat.
- ...das Argument einer log- oder ln-Funktion einen negativen Wert annimmt.

Mit diesen Regeln kannst du den Definitionsbereich für die Funktion f bestimmen.

▸ Nullstellen berechnen

Nullstellen sind die x-Werte, an denen $f(x)=0$ gilt. Um diese zu bestimmen, musst du den Funktionsterm mit Null gleichsetzen.

▸ Grenzwerte für $x\to\pm\infty$ berechnen

Um die Grenzwerte der Funktion f_k zu bestimmen, muss die Funktion erst umformuliert werden:

$$\frac{10x-k}{x^2}=\frac{10x}{x^2}-\frac{k}{x^2}=\frac{10}{x}-\frac{k}{x^2}$$

Mit dieser umgeformten Funktionsgleichung kannst du nun den Grenzwert bestimmen:

Um zu bestimmen, welchen Wert die Funktion annimmt, wenn der eingesetzte x- Wert gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, setzt du gedanklich sehr große bzw. sehr kleine Beispielwerte ein.

▸ Gleichung aller Asymptoten bestimmen

Die waagrechten Asymptoten bestimmst du durch den Grenzwert. Der Wert, an den sich die Funktion im Unendlichen annähert, entspricht der waagrechten Asymptote.
Gibt es für $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$ verschiedene Grenzwerte, gibt es auch zwei waagrechte Asymptoten.
Die senkrechten Asymptote befindet sich an der Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist, also an den Definitionslücken.

▸ Art und Lage der Extrempunkte berechnen

Um die Extrempunkte des Graphen von f_k zu bestimmen, musst du die Funktion f_k auf Minima bzw. Maxima untersuchen. Für diese sind die folgenden Kriterien zu erfüllen:

- Notwendige Bedingung: $f_k'(x)=0$

- Hinreichede Bedingung: $\boldsymbol{f_k''(x) > 0}$ für ein Minimum und $\boldsymbol{f_k''(x) < 0}$ für ein Maximum.

Hast du schließlich alle x-Werte bestimmt, für die ein Minimum bzw. Maximum vorliegt, so kannst du besagten x-Wert in den Term der Funktion f einsetzen und erhältst so die entsprechende y-Koordinate.

1. Schritt: Leite die Funktion nach x ab

Da die Funktion f eine gebrochen rationale Funktion ist, musst du die **Quotientenregel** verwenden um f abzuleiten.

2. Schritt: Setze den Term der Ableitung mit Null gleich

Überprüfe die notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

3. Schritt: Zweite Ableitung auf Terassenpunkt überprüfen

Mit dem hinreichenden Kriterium $\boldsymbol{f''(x) \neq 0}$ überprüfst du, ob es sich wirklich um einen Extrempunkt handelt.
Gilt nämlich $f''(x) = 0$, so handelt es sich nicht um einen Hoch- oder Tiefpunkt, sondern um einen Sattelpunkt.

Auch die zweite Ableitung bestimmst du mit der Quotientenregel.

4. Schritt: Bestimme die y-Koordinate des Extrempunkts

Die y-Koordinate bestimmst du durch Einsetzen des x-Wertes in den ursprünglichen Funktionsterm.

Ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt, findest du heraus, indem du den Funktionswert der zweiten Ableitung an der x-Koordinate des Extrempunktes betrachtest. Es gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}}} \quad \boxed{\boldsymbol{f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}}}$$

▶ Ortskurve der Extrempunkte ermitteln

Die Koordinaten der Extrempunkte in Abhängigkeit von k hast du bereits ermittelt: $\mathrm{E}_k\left(\frac{k}{5}\middle|\frac{25}{k}\right)$.
Für die x-Koordinate gilt also: $x_{\mathrm{E}} = \frac{k}{5}$.
Formst du diese Gleichung nach k um, ergibt sich $k = 5x$.
Diesen Wert von k musst du in die y-Koordinate einsetzen, um die Ortskurve zu bestimmen, auf der alle Extrempunkte der Funktionenschar liegen.

b) ▸ **Gleichung der Wendetangente t_4 aufstellen**

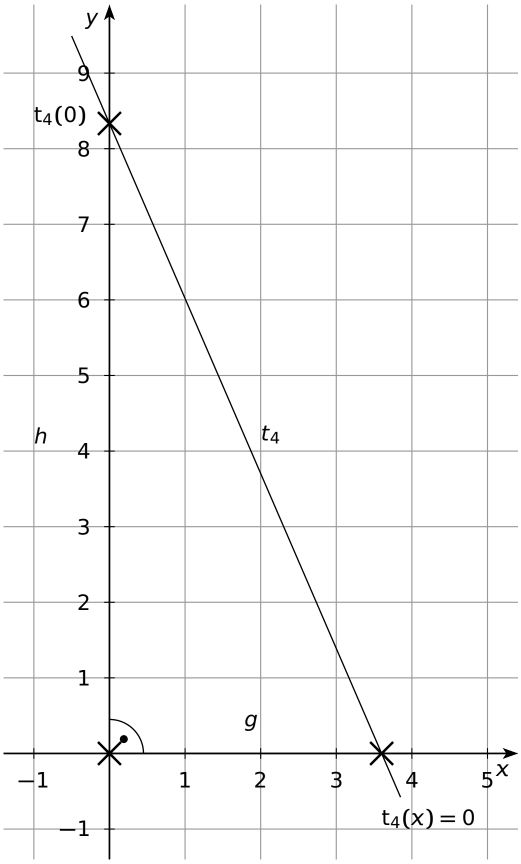
Willst du die Tangente an einen Graphen an einer beliebigen Stelle x_0 bestimmen, verwendest du am Besten folgende Gleichung:

$$\boxed{y = t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Hier stellt f die Funktion dar, an die die Tangente angelegt werden soll. x_0 gibt die Stelle an und x die Veränderliche.

Um die Tangente t_4 im Wendepunkt W_4 zu bestimmen, musst du die entsprechenden Werte einsetzen.
Da die Tangente an der Wendepunkt $W(\frac{3k}{10} \mid \frac{200}{9k})$ angelegt werden soll, muss hier $x_0 = \frac{3k}{10}$ gelten.

▸ **Maßzahl des Flächeninhalts berechnen.**



Wie du an dieser Skizze erkennen kannst, handelt es sich um ein **rechtwinkliges Dreieck**.
Den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks berechnet man nach folgender Formel:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Hast du die Länge der beiden Seiten berechnet, kannst du den gesamten Flächeninhalt nach dieser Formel bestimmen.

1. Schritt: Länge der Grundseite *g* ermitteln

Um die Länge der Grundseite zu ermitteln, musst du den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ermitteln. Der Abstand zwischen dem Ursprung und diesem Schnittpunkt entspricht der gesuchten Länge. Um die Nullstelle also zu ermitteln, kannst du die Gleichung der Tangenten t_4 mit Null gleichsetzen und den passenden Wert für x bestimmen.

2. Schritt: Länge der Höhe *h* berechnen

Die Höhe des Dreiecks berechnest du auf die gleiche Weise. Allerdings interessiert hier der Abstand des Schnittpunkts der Tangente mit der y-Achse vom Ursprung.

3. Schritt: Maßzahl des Flächeninhalts berechnen

Nach der oben genannten Form und den gerade bestimmten Längen von Höhe und Grundlinie kannst du den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen. Da keine Einheiten gegeben sind, sollst du lediglich die Maßzahl des Flächeninhalts angeben.

c) ▸ **Zusammenhang zwischen Abbildung und G_4 begründen**

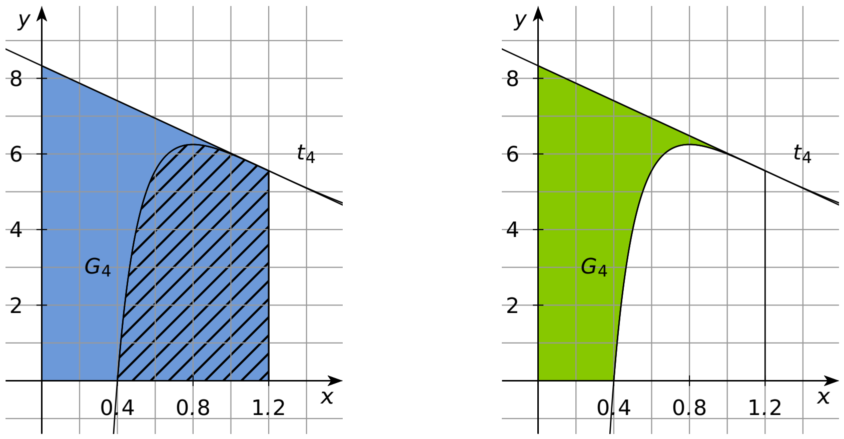
In diesem Aufgabenteil sollst du begründen, warum der Graph, der auf der Abbildung dargestellt ist, zur Funktion f_4 gehört. Dies kannst du zum Beispiel über die Nullstellen der Funktion f_4 und der Wendetangente t_4 begrünen.
Berechne die Schnittpunkte der beiden Graphen mit der x-Achse und vergleiche dein Ergebnis mit der erhaltenden Skizze. Weiterhin kannst du die Informationen zur Tangente t_4 aus dem Aufgabenteil zuvor verwenden.

▸ Fläche kennzeichnen und beschreiben

Nun sollst du den Flächeninhalt A_1, der durch die Gleichung

$$A_1 = \int_0^{1,2} t_4(x)\mathrm{d}x - \int_{0,4}^{1,2} f_4(x)\mathrm{d}x$$

berechnet werden kann, beschreiben und im angefügten Arbeitsblatt kennzeichnen.
Überlege dir dazu, welche Flächen die Integrale jeweils veranschaulichen.



Das Integral $\int_0^{1,2} t_4(x)\mathrm{d}x$ beschreibt die blaue Fläche zwischen der Tangente t_4 und der x-Achse innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 1,2$.

Das Integral $\int_{0,4}^{1,2} f_4(x)\mathrm{d}x$ veranschaulicht die schwarz schraffierte Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f_4 und der x-Achse zwischen den Grenzen $x = 0,4$ und $x = 1,2$.

Was bedeutet also die Differenz aus diesen beiden Flächen?

▸ Beweisen, dass Flächeninhalte übereinstimmen

Um zu beweisen, dass $A_1 = A_2$ gilt, kannst du für A_2 folgende Eigenschaften verwenden:

$$\boxed{\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x}$$