a) **Berechnung des Funktionswerts und Interpretation** (11VP)

Der Funktionswert an der Stelle $t = 30$ ergibt sich zu:

$f(30) = 0,02 \cdot 30^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,1\cdot 30} = 18\mathrm{e}^{-3} \approx 0,896$

Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass eine 30jährige Fichte mit einer Geschwindigkeit von ca. $0,9$ Meter pro Jahr wächst.

Beschreibung der Entwicklung der Fichte

Nach dem Einpflanzen der Fichte steigt ihre Wachstumsgeschwindigkeit in den ersten 20 Jahren stark auf bis zu ca. $1,1$ Meter pro Jahr an und erreicht hier ihr Maximum. Die Fichte wächst nun immer noch, jedoch immer langsamer, nach 70 Jahren beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit nur noch etwa $0,1$ Meter pro Jahr.

Mit 100 Jahren beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit fast Null. Die Fichte ist ausgewachsen und wächst praktisch nicht mehr.

b) **Berechnung des Alters, in dem die Fichte am stärksten wächst** (11VP)

Die Funktion f gibt die Wachstumsgeschwindigkeit der Fichte an, diese wärkst daher am stärksten an der Stelle, an der die Funktion ihr absolutes Maximum besitzt.

Um diese Stelle zu finden, muss zunächst die erste Ableitung von f nach der Produktregel gebildet werden. Dabei ist zu beachten, dass für die Ableitung des Terms $\mathrm{e}^{-0,1t}$ nach der Kettenregel gilt:

$\left(\mathrm{e}^{-0,1t}\right)' = \mathrm{e}^{-0,1t} \cdot (-0,1) = -0,1\mathrm{e}^{-0,1t}$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 0,02 \cdot 2t \cdot \mathrm{e}^{-0,1t} + 0,02t^2 \cdot \left(-0,1\mathrm{e}^{-0,1t}\right) \\
&= 0,04t \cdot \mathrm{e}^{-0,1t} - 0,002t^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,1t} && \mid \mathrm{e}^{-0,1t} \text{ ausklammern} \\
&= \mathrm{e}^{-0,1t}\left(0,04t - 0,002t^2\right)
\end{aligned}$$

Über die notwendige Bedingung $f'(t) = 0$ lassen sich nun die möglichen Extremstellen von f bestimmen:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 0 \\
\mathrm{e}^{-0,1t}\left(0,04t - 0,002t^2\right) &= 0 && \mid \mathrm{e}^{-0,1t} \text{ kann als Exponentialfunktion nie Null werden!} \\
0,04t - 0,002t^2 &= 0 \\
t(0,04 - 0,002t) &= 0 && \Rightarrow \quad t_1 = 0 \\
0,04 - 0,002t_2 &= 0 \\
t_2 &= \frac{0,04}{0,002} = 20
\end{aligned}$$

Somit sind $t_1 = 0$ sowie $t_2 = 20$ die beiden möglichen Extremstellen von f.

Um sie als echte relative Maximumsstellen nachzuweisen und ihre Art zu bestimmen, werden diese beiden Werte in die zweite Ableitung von f eingesetzt, die im Aufgabentext vorgegeben ist:

$f''(0) = 0,0002 \cdot (0^2 - 40 \cdot 0 + 200) \cdot \mathrm{e}^{-0,1\cdot 0} = 0,0002 \cdot 200 \cdot \mathrm{e}^0 = 0,04 > 0$

$f''(20) = 0,0002 \cdot (20^2 - 40 \cdot 20 + 200) \cdot \mathrm{e}^{-0,1\cdot 20} = 0,0002 \cdot (-200) \cdot \mathrm{e}^{-20} \approx -0,0054 < 0$

Somit hat f an der Stelle $t = 20$ ihr relatives Maximum. Wie der Graph zeigt, ist dies auch das absolute Maximum von f. Die Wachstumsgeschwindigkeit an dieser Stelle beträgt:

$$f(20) = 0{,}02 \cdot 20^2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1\cdot 20} = 8\mathrm{e}^{-2} \approx 1{,}083$$

Die Fichte wächst somit nach 20 Jahren am stärksten, nämlich mit einer Geschwindigkeit von ca. $1{,}08$ Metern pro Jahr.

Hinweis: Wer in der Prüfung einen GTR zur Verfügung hat, kann die Koordinaten des Hochpunktes von f direkt damit bestimmen.

c) **Begründung, dass die Fichte nach 20 Jahren weniger als 20 m hoch ist** (6VP)

Am Graphen von f ist zu erkennen, dass die Fichte in den ersten fünf Jahren nie mehr als etwa $0{,}35$ Meter pro Jahr gewachsen ist. In den ersten fünf Jahren kann sie damit nicht mehr als $5 \text{ Jahre} \cdot 0{,}35\,\frac{\text{m}}{\text{Jahr}} = 1{,}75$ m gewachsen sein.

In den darauffolgenden 5 Jahren ist die Fichte nie mehr als $0{,}8$ Meter pro Jahr gewachsen ist, hier kann sie somit nur maximal $5 \cdot 0{,}8 \text{ m} = 4 \text{ m}$ gewachsen sein.

Zwischen 10 und 15 Jahren ist der Baum nie mehr als 1 Meter pro Jahr gewachsen, hier kann er nur maximal $5 \cdot 1 \text{ m} = 5 \text{ m}$ gewachsen sein.

In den nun folgenden fünf Jahren ist die Fichte nie mehr als ca. $1{,}1$ Meter pro Jahr gewachsen, somit kann sie in diesem Zeitraum nur maximal $5 \cdot 1{,}1 \text{ m} = 5{,}5 \text{ m}$ gewachsen sein.

Für die ersten 20 Jahre ergibt sich eine maximale Höhe von $1{,}75 + 4 + 5 + 5{,}5 = 16{,}25$ m. Somit ist die Fichte nach 20 Jahren immer noch kleiner als 20 m.

Nachweis der Stammfunktion

Die Funktion F ist genau dann eine Stammfunktion von f, wenn $F'(t) = f(t)$ gilt. Um dies nachzuweisen, wird F wiederum nach der Produktregel abgeleitet:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -0{,}2 \cdot \left[(2t+20)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t} + (t^2+20t+200)\cdot\left(-0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}1t}\right)\right]\\
&= -0{,}2 \cdot \left[(2t+20)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t} + (-0{,}1t^2-2t-20)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t}\right]\\
&= -0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}1t}(2t+20-0{,}1t^2-2t-20)\\
&= -0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}1t}\cdot(-0{,}1t^2)\\
&= 0{,}02t^2\cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t}\\
&= f(t)
\end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Berechnung der zu erwartenden Höhe nach 20 Jahren

Die Höhe der Fichte ergibt sich als Fläche unterhalb des Graphen von f im Bereich $0 \leq t \leq 20$.

Für das Integral ergibt sich mit der gegebenen Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int_0^{20} f(t)\,dt &= [F(t)]_0^{20} = F(20) - F(0)\\
&= \left(-0{,}2\cdot(20^2+20\cdot 20+200)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}1\cdot 20}\right) - \left(-0{,}2\cdot(0^2+20\cdot 0+200)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}1\cdot 0}\right)\\
&= (-200\mathrm{e}^{-2}) - (-40)\\
&\approx -27{,}07 + 40 = 12{,}93
\end{aligned}$$

Es muss dabei berücksichtigt werden, dass die Fichte beim Einpflanzen bereits eine Höhe von 0,2 m besitzt. Nach 20 Jahren ist somit eine Höhe von 13,13 m zu erwarten.

d) **Begründung, dass die Stammfunktion F eine Wendestelle hat** (5VP)

Die Funktion F hat genau dort eine Wendestelle, an der $F''(t) = 0$ und $F'''(t) \neq 0$ gilt.

Da $F''(t) = f'(t)$ gilt, sind also die Stellen gesucht, an denen $f'(t) = 0$ sowie $f''(t) \neq 0$ gilt. Dies ist laut Teilaufgabe b) an der Stelle $t = 20$ der Fall, wie dort berechnet wurde.

Die Stammfunktion F hat somit eine Wendestelle bei $t = 20$.

e) **Berechnung der maximalen Höhe der Fichte** (17VP)

Um die maximale Höhe zu bestimmen, wird zunächst allgemein die Höhe $h(z)$ der Fichte nach allgemein z Jahren (mit $z > 0$) berechnet. Mit dem Integral aus Teilaufgabe c) ergibt sich:

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^z f(t)\,dt = [F(t)]_0^z = F(z) - F(0) \\ &= \left(-0,2 \cdot (z^2 + 20z + 200)\mathrm{e}^{-0,1z}\right) - \left(-0,2 \cdot (0^2 + 20 \cdot 0 + 200)\mathrm{e}^{-0,1 \cdot 0}\right) \\ &= -0,2(z^2 + 20z + 200)\mathrm{e}^{-0,1z} + 40 \end{aligned}$$

Um nun die maximale Höhe zu berechnen, muss der Grenzwert von $h(z)$ gebildet werden, wenn das Jahr $z \to \infty$ geht:

$$\lim_{z \to \infty} h(z) = \lim_{z \to \infty} \left(-0,2(z^2 + 20z + 200) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0,1z}}_{\to 0} + 40 \right) = 0 + 40 = 40$$

Zur Erklärung: Der Term $\mathrm{e}^{-0,1z}$ geht für große z gegen Null – und zwar schneller als der Restterm $-0,2(z^2 + 20z + 200)$ wächst. Daher geht der gesamte linke Summand gegen Null. Als Grenzwert ergibt sich 40 m.

Auch hier muss die Anfangshöhe von 0,2 m berücksichtigt werden. Eine Fichte mit der gegebenen Wachstumsfunktion wird somit langfristig eine maximale Höhe von etwa 40,2 m erreichen.