1. a) ▶ **Wahrscheinlichkeit $< 0,7$ nachweisen** (5BE)

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewerber der nur rät sich bei einer Schriftprobe richtig entscheidet liegt bei $\frac{1}{2}$. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der richtig beurteilten Schriftproben zählt. X ist binomialverteilt, mit $p = \frac{1}{2}$ und $n = 12$. Da ein Bewerber erst eingestellt wird, wenn er mehr als $\frac{2}{3}$ richtig hat, muss der Bewerber **mehr** als 8 Schriftproben richtig beurteilen, d.h. er muss **mindestens** neun Schriftproben richtig beurteilen. Daraus folgt für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(Z \geq 9) &= P(Z=9) + P(Z=10) + P(Z=11) + P(Z=12) \\ &= \binom{12}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{12}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot (220 + 66 + 12 + 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 299 \approx 0,073 > 0,07 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit einen ratenden Bewerber einzustellen ist größer als 7%.

b) ▶ **Wahrscheinlichkeit $< 0,3$ nachweisen** (3BE)

X ist nun binomialverteilt, mit $p = \frac{1}{2}$ und $n = 30$. Der Bewerber muss **mehr als** 20 Schriftproben, also **mindestens** 21 Schriftproben richtig beurteilen, damit er eingestellt wird. Daraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$P(Z \geq 21) = 1 - P(X \leq 20) \approx 0,021$$

Die Wahrscheinlichkeit einen ratenden Bewerber einzustellen ist kleiner als 3%.

c) ▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen** (3BE)

Sei X wieder die Anzahl der richtig zugeordneten Schriftproben. Da sich der Graphologe selbst so einschätzt, dass er von den 30 Schriftproben $\frac{3}{4}$ richtig zuordnet, kann X als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 30$ und $p = \frac{3}{4}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Graphologe **trotz** seiner Kompetenz als ratend eingestuft wird, d.h. dass er **weniger** als die geforderten 20 Schriftproben richtig zuordnet. Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 20)$. Diese Wahrscheinlichkeit erhältst aus einer Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 30$ und $p = 0,75$:

$$P(X \leq 20) \approx 0,197$$

Der Graphologe wird mit einer Wahrscheinlichkeit von circa 19,7% als ratend eingestuft.

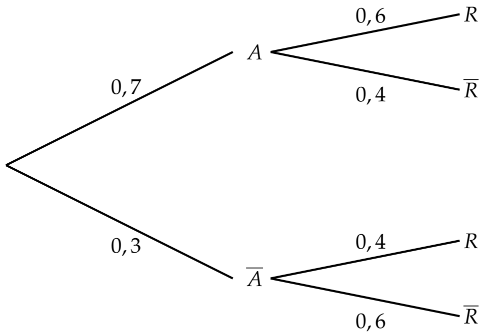
d) ▶ **Nullhypothese angeben** (2BE)

Sei p die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Bewerber eine Schriftprobe richtig zuordnet. Der Test soll Klarheit darüber verschaffen, ob diese Wahrscheinlichkeit des Bewerbers **kleiner oder gleich 0,5** ist, denn ratende Bewerber sollen **aussortiert werden**. Die Nullhypothese, die getestet wird, lautet also $H_0 : p \leq 0,5$.

▶ **Ablehnungsbereich angeben**

Der Bewerber wird erst eingestellt, wenn er $\frac{2}{3}$ der 30 Schriftproben richtig eingeschätzt hat, d.h. **mehr als** 20 Stück. Erst dann wird die Nullhypothese, dass er **rate**, **abgelehnt**. Damit ergibt sich der Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{21, ..., 30\}$

2. a) **► Baumdiagramm zeichnen** (4BE)



► Vierfeldertafel erstellen

Einige Wahrscheinlichkeiten sind direkt in der Aufgabenstellung gegeben: 35 der 50 angestellten gelten als aufgeschlossen, daraus folgt die Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{35}{50} = 0,7$.

40 % der 35 als aufgeschlossen geltenden haben eine **nicht** nach rechts geneigte Handschrift. Dies sind $0,4 \cdot 35 = 14$ der 50 Personen. Somit gilt $P(A \cap \overline{R}) = \frac{14}{50} = 0,28$.

6 der 50 Angestellten gelten **nicht** als aufgeschlossen, aber haben eine nach rechts geneigte Handschrift, d.h. $P(\overline{A} \cap R) = \frac{6}{50} = 0,12$.

Trage diese Wahrscheinlichkeiten in eine Vierfeldertafel ein; wir haben sie darin **fett** gekennzeichnet. Die übrigen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich über **Addition** und **Subtraktion**. Wir bieten hier **beide** Möglichkeiten an: eine mit **absoluten Zahlen**, eine mit **relativen Anteilen**.

	R	$\overline{R}$	
A	0,42	**0,28**	**0,7**
$\overline{A}$	**0,12**	0,18	0,3
	0,54	0,46	1

	R	$\overline{R}$	
A	21	**14**	**35**
$\overline{A}$	**6**	9	15
	27	23	50

b) **► Stochastische Abhängigkeit begründen** (2BE)

Stochastische Abhängigkeit wird gezeigt durch: $P(A) \cdot P(R) \neq P(A \cap R)$

Aus der Vierfeldertafel kannst du die Wahrscheinlichkeiten entnehmen: $P(A) = 0,7$, $P(R) = 0,54$, $P(A \cap R) = 0,42$. $P(A) \cdot P(R) = 0,7 \cdot 0,54 = 0,378 \neq 0,42$

Damit ist die stochastische Abhängigkeit der beiden Ereignisse gezeigt.

c) **► Prozentsatz ändern** (2BE)

40 % der Mitarbeiter, welche als aufgeschlossen gelten, haben eine **nicht** nach rechts geneigte Handschrift, also haben 60 % dieser Mitarbeiter eine nach rechts geneigte Handschrift.

Der Prozentsatz 40 % soll nun verändert werden; es werden also Prozentpunkte **addiert** oder **subtrahiert**. Wir können den neuen Prozentsatz also schreiben als $0,4 + x$; den des Gegenereignisses entsprechend als $0,6 - x$.

Dies hat unmittelbare Folgen für die Wahrscheinlichkeiten $P(A \cap \overline{R}) = 0{,}7 \cdot (0{,}4 + x)$ und damit $P(A \cap R) = 0{,}7 \cdot (0{,}6 - x)$:

	R	$\overline{R}$	
A	$0{,}7 \cdot (0{,}6 - x)$	$\mathbf{0{,}7 \cdot (0{,}4 + x)}$	$\mathbf{0{,}7}$
$\overline{A}$	$\mathbf{0{,}12}$	$0{,}18$	$0{,}3$
	$0{,}12 + 0{,}7 \cdot (0{,}6 - x)$	$0{,}18 + 0{,}7 \cdot (0{,}4 + x)$	1

Dieses x soll nun so gewählt werden, dass die Ereignisse A und R **stochastisch unabhängig** sind:

$$\begin{aligned} P(A) \cdot P(R) &= P(A \cap R) && \text{Werte eintragen} \\ 0{,}7 \cdot (0{,}12 + 0{,}7 \cdot (0{,}6 - x)) &= 0{,}7 \cdot (0{,}6 - x) && \\ 0{,}378 - 0{,}49x &= 0{,}42 - 0{,}7x && \mid +0{,}7x - 0{,}378 \\ 0{,}21x &= 0{,}042 && \mid : 0{,}21 \\ x &= 0{,}2 && \end{aligned}$$

Der Anteil $0{,}4$ muss um $0{,}2$ erhöht werden zu $0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$. Der Prozentsatz $40\,\%$ ändert sich also zu $60\,\%$.

3. a) ▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen** (2BE)

Sei X die Anzahl der Unternehmen, die ein graphologisches Gutachten einholen. X kann als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0{,}25$ und $n = 20$.

Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit $P(X = 5)$:

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= \binom{20}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15} \\ &= 15504 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^{15} \\ &\approx 0{,}2023 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $20{,}23\,\%$ ziehen genau 5 der 20 Unternehmen ein graphologisches Gutachten zu Rate.

b) ▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen** (3BE)

Wir betrachten immer noch die gleiche, binomialverteilte Zufallsvariable wie in Aufgabenteil a). Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Unternehmen, die ein graphologisches Gutachten einholen, kleiner als der zugehörige Erwartungswert ist, d.h. die Wahrscheinlichkeit $P(X < \mu)$.
Was fehlt uns zur Berechnung? Natürlich der Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}25 = 5$.

Für die Wahrscheinlichkeit $P(X < 5) = P(X \leq 4)$ ist es ratsam, einen Blick in die Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 20$ zu werfen und die benötigte Wahrscheinlichkeit auszulesen.

$P(X \leq 4) = 0{,}4148$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $41,48\,\%$ ist die Anzahl der Unternehmen, die ein graphologisches Gutachten einholen, kleiner als der Erwartungswert.

c) ► **Aussage begründen oder widerlegen** (4BE)

Um eine mathematische Aussage zu bestätigen, muss diese allgemein bewiesen werden. Um eine Aussage zu widerlegen, reicht es, ein Gegenbeispiel zu benennen.

In diesem Fall suchen wir ein Gegenbeispiel.

Wie bereits in Aufgabenteil b) besprochen gilt für den Erwartungswert einer Binomialverteilung $\mu = n \cdot p$. Wähle nun die Parameter n, p und k so, dass die getroffene Aussage falsch wird.

Mit einem Blick in die Tabelle für kumulierte Binomialverteilung wird deutlich, dass für kleine n und p Wahrscheinlichkeiten $> 0,5$ gelten. Wähle aus diesem Bereich ein Gegenbeispiel.

Wähle z.B. eine Zufallsvariable X, die binomialverteilt ist mit $n = 10$ und $p = 0,02$. Als Erwartungswert ergibt sich $\mu = 10 \cdot 0,02 = 0,2$. Wäre die Aussage in der Aufgabenstellung korrekt, so müsste $P(X \leq 0) = P(X = 0) < 0,5$ sein. In der Tat gilt aber $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot (0,02^0) \cdot (0,98)^{10} = 0,98^{10} = 0,81 > 0,5$.
Damit ist die Aussage widerlegt, da sie nun **unmöglich** für alle Zufallsvariablen gelten kann.