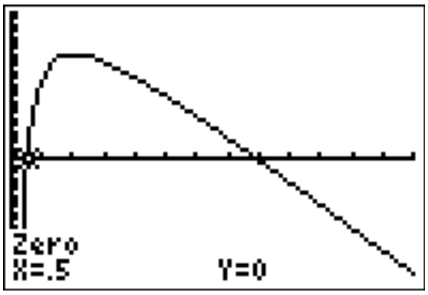
a) ▶ **Schnittpunkte des Graphen von s mit der x-Achse bestimmen** (4P)

Betrachtet wird Funktion s, welche die Steigung der Aktivität (in %) des Medikaments in Abhängigkeit von der täglichen Dosis x (in mg/kg Körpergewicht) repräsentiert.

Für $0,5 \leq x \leq 12$ gilt näherungsweise:

$s(x) = 34 - 4x - \dfrac{16}{x}$.



Um die Aufgabe mit dem GTR zu lösen, gibst du die Funktionsgleichung von s in den Funktionen -Editor ein.
Gemäß dem Definitionsbereich empfiehlt es sich die Randbereiche in der die x-Achse auf „Xmin=0“ und „Xmax=13“ festzulegen.
Zur Skalierung der y-Achse kannst du dich am gegebenen Koordinatensystem orientieren. Lege also „Ymin=-20“ und „Ymax=25“ fest.
Lasse dir nun den Graphen anzeigen.

Auf dem Display siehst du, dass der Graph zweimal die x-Achse schneidet. Diese kannst du mit dem GTR bestimmen.

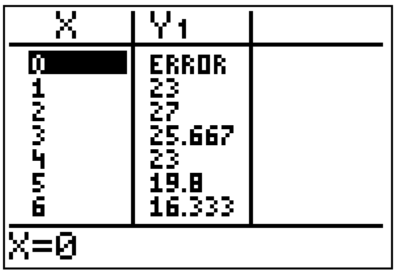
▶ **Extrempunkte des Graphen von s bestimmen**

Nun ist es deine Aufgabe, den Graphen von s im gegebenen Intervall auf Extrempunkte zu untersuchen. Damit an einer bestimmten betracheteten Stelle x_E eine Extremstelle vorliegt, müssen an dieser Stelle folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

- Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$.
- Hinreichende Bedingung. $f''(x_E) \neq 0$.

Aber die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von s können auch im Graphs-Modus deines GTR bestimmt werden. Speichere dazu zunächst den Funktionsterm von s im Funktionen-Editor deines GTR und bestimme über bestimmte Eingabenfolgen die Koordinaten des gesuchten Extrempunkts. Da Funktion s nur auf einem beschränkten Intervall definiert ist, musst du diese noch auf Randextrema untersuchen. Setze dazu die jeweiligen Intervallsgrenzen in den Funktionsterm von s ein und untersuche so, ob Randextrema existieren.

▶ **Graph der Funktion s skizzieren**



Hier ist es nun deine Aufgabe, den Graphen von s in das, in der Anlage befindlichen, Koordinatensystemen zu skizzieren. Beim Skizzieren des Graphen von s kann dir dein GTR behilflich sein. Hast du den Funktionsterm von s im Funktionen-Editor deines GTR gespeichert, so kannst du dir über folgende Eingabenfolge die zugehörige Wertetabelle anzeigen lassen.
Des Weiteren hast du die Koordinaten des Hochpunktes, der Schnittpunkte des Graphen von s mit der x-Achse und die Koordinaten der Randextrema berechnet. Diese können dir beim Skizzieren des Graphen von s in das gegebene Koordinatensystem ebenfalls behilflich sein.

Beachte, dass die Funktion nur für $0,5 \leq x \leq 12$ definiert ist, zeichne also nicht über diese Stellen hinaus.

▶ Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang interpretieren

Du kannst den Verlauf des Graphen interpretieren, indem du die Bedeutung der signifikanten Punkte beschreibst und außerdem den Verlauf der Kurve im Sachzusammenhang beschreibst.

Beginne für kleine x-Werte im gegebenen Intervall und arbeite dich dann bis zum Punkt R vor.

b) **▶ Tägliche Dosis Lectozyn mit maximaler Wirkung bestimmen** (11P)

Es wird immer noch die Funktion s aus dem Teil a) betrachtet. Folglich kannst du Aussagen anhand der bereits berechneten Werte treffen.

Die Aufgabe fragt nun nach der Dosis mit maximaler Wirkung für einen Patienten mit einem Körpergewicht von 80 kg. In a) hast du bereits bestimmt, dass das Medikament am wirkungsvollsten ist bei einer Dosierung von 2 mg/kg. Somit kannst du die benötigte Dosierung bestimmen, indem du die Dosierung 2 mg/kg mit dem Körpergewicht des Patienten multiplizierst.

▶ Wirkungssteigerung s für eine Person mit 80 kg Körpergewicht bestimmen, wenn...

Du musst hier drei Fälle unterscheiden

1. Wirkungssteigerung, wenn die vorgeschlagene Dosierung eingehalten wird
2. Wirkungssteigerung, wenn eine Tablette mehr als vorgeschrieben eingenommen wird
3. Wirkungssteigerung, wenn eine Tablette weniger als vorgeschrieben eingenommen wird

... die vorgeschlagene Dosierung eingehalten wird

Hierzu musst du die Gesamtdosis von 150 mg ($\widehat{=}$ 3 Tabletten à 50 mg), die laut Packungsbeilage von einer 80 kg schweren Person eingenommen werden sollen, auf die Dosis in mg pro kg Körpergewicht umrechnen.

Für alle weiteren Fälle gehst du ganz analog vor:
Zuerst errechnest du die tägliche Gesamtdosis, rechnest in die Dosis mg pro kg Körpergewicht um und setzt den so erhaltenen Wert in den Funktionsterm von s ein.

▶ Beurteilen, ob der Dosierungsvorschlag geeignet erscheint

Um den Dosierungsvorschlag zu beurteilen, gehe auf die maximale Wirkung ein und untersuche, wie nah die Wirkung mit den vorgeschlagenen Dosierungen an diesem maximalen Wert liegt. Besteht nur eine kleine Differenz zwischen dem maximalen Wert und der Wirkung, die erzielt wird, so sind die Angaben gut. Andernfalls kannst du den Dosierungsvorschlag als nicht geeignet einstufen.

c) ▶ **Zeigen, dass t_2 die Taylorfunktion 2. Grades zur Funktion s bei $x = 2$ ist** (12P)

Zusätzlich zur Funktion s mit

$$s(x) = 34 - 4x - \frac{16}{x}.$$

ist gegeben die Taylorfunktion 2. Grades mit

$$t_2(x) = -2x^2 + 8x + 10.$$

Um zu zeigen, dass t_2 eine Taylorfunktion von Funktion s an der Stelle $x = 2$ ist, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Die Funktionswerte an der Stelle $x = 2$ müssen für beide Funktionen übereinstimmen: $t_2(2) = s(2)$
- Die Funktionswerte der ersten Ableitungen müssen an der Stelle $x = 2$ übereinstimmen: $t_2'(2) = s'(2)$
- Die Funktionswerte der zweiten Ableitungen müssen an der Stelle $x = 2$ übereinstimmen: $t_2''(2) = s''(2)$

▶ **Algebraisch den Inhalt der Fläche zwischen $1 \leq x \leq 3$ berechnen** (12BE)

Um den Flächeninhalt algebraisch zu bestimmen, der von der Funktion $t_2(x)$ und der x-Achse im Bereich $1 \leq x \leq 3$ eingeschlossen wird, berechnest du das Integral in den gegebenen Grenzen, da dieses auch als Flächeninhalt unter der Kurve interpretiert werden kann.
Setze also die Integrationsgrenzen, die du gegeben hast, ein und berechne das Integral der Form

$$A = \int_1^3 t_2(x)\mathrm{d}x$$

Die Funktion t_2 lautet:

$$t_2(x) = -2x^2 + 8x + 10$$

d) ▶ **Zeigen, dass $s_k'(x) = -4 + \frac{k^2}{x^2}$** (11P)

Gegeben ist die Funktionsschar s_k mit

$$s_k(x) = 34 - 4x - \frac{k^2}{x^2}$$

Um zu zeigen, dass $s_k'(x) = -4 + \frac{k^2}{x^2}$ kannst du die Funktion s_k allgemein ableiten.

Dabei wird k wie eine konstante Zahl behandelt.

▶ **Nachweisen, dass jede Kurve der Schar zwei Punkte mit waagerechter Tangente hat**

Ein Punkt auf einer Kurve hat dann einen waagerechte Tangente, wenn es sich um einen Extrempunkt (Hochpunkt, Tiefpunkt oder Sattelpunkt) handelt.
Es gilt also hier nachzuweisen, dass die Funktionsschar s_k zwei Extrempunkte hat. Dazu reicht es, wenn du die Extrempunkte bestimmst. Ob es sich um Hochpunkte, Tiefpunkte oder Sattelpunkt handelt ist dabei unerheblich.

Bei einem Extrempunkt müssen also folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Die erste Ableitung der betrachteten Funktion s_k muss an der Stelle des Extrempunktes eine Nullstelle besitzen $\Longrightarrow\ s_k'(x) = 0$.

► Untersuchen, ob Aussage wahr ist

Verbindest du beide Extrempunkte miteinander, erhältst du eine Strecke $\overline{E_1E_2}$ mit einem Mittelpunkt M.

Es geht nun darum zu untersuchen, ob der Mittelpunkt M beider miteinander verbundener Extrempunkte immer die selben Koordinaten hat. Dies ist dann der Falls, wenn M unabhängig von k ist.

Der Mittelpunkt einer Strecke ist das arithmetische Mittel ($\overline{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$) der Koordinaten der Endpunkte.

Hast du die Endpunkte E_1 und E_2 gegeben, ist die x-Koordinate des Mittelpunkts M der Strecke $\overline{E_1E_2}$ das arithmetische Mittel der x-Koordinaten von E_1 und E_2; gleiches gilt analog für die y-Koordinate von M.