a)

(1)

▸ Bestimmen einer Koordinatenform der Ebene E

Der Aufgabenstellung kannst du hier entnehmen, dass die Punkte A, B und C, mit

- $A(0,3\,|\,3,7\,|\,4,85)$
- $B(-0,15\,|\,3,7\,|\,5,3)$
- $C(-0,3\,|\,4,3\,|\,5,15)$

auf dem **kreisförmigen** Glasrand liegen. Deine Aufgabe ist es dabei, die **Koordinatenform** der Ebene E zu bestimmen, in welcher der Glasrand mit diesen drei Punkten liegt.
Die Koordinatenform einer Ebene E baut sich dabei wie folgt auf:

$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ mit:

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des **Normalenvektors $\overrightarrow{n}$**
- d: Über **Punktprobe** zu bestimmende **Konstante**

Bestimme also zunächst den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene E. Berechne dazu das **Vektorprodukt** von **2 Richtungsvektoren** der Ebene E. Bestimme anschließend d über eine **Punktprobe** mit einem Punkt, von dem du weißt, dass dieser in der Ebene E liegt.

1. Schritt: Bestimmen des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$

Als Richtungsvektoren der Ebene E könnten hier die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ mit

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -0,15 \\ 3,7 \\ 5,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 \\ 3,7 \\ 4,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,45 \\ 0 \\ 0,45 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 4,3 \\ 5,15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 \\ 3,7 \\ 4,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,6 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

fungieren.
Berechne mit diesen nun wie folgt das **Vektorprodukt**:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -0,45 \\ 0 \\ 0,45 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,6 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0,3 & - & 0,45 \cdot 0,6 \\ 0,45 \cdot (-0,6) & - & (-0,45) \cdot 0,3 \\ -0,45 \cdot 0,6 & - & 0 \cdot (-0,6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,27 \\ -0,135 \\ -0,27 \end{pmatrix}$$

Da beim Normalenvektor nicht die Länge sondern hier nur die **Richtung** entscheidend ist, lässt sich dieser auch wie folgt angeben:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -0,27 \\ -0,135 \\ -0,27 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Bestimmen der vollständigen Koordinatenform

Setzt du den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ nun in die Koordinatenform von oben ein, so ergibt sich diese für die Ebene E zu:

- $E:\ 2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = d$

Setze nun beispielsweise die Koordinaten von A ein, um hier die Konstante d zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 2\cdot 0,3+3,7+2\cdot 4,85 &= d \\ 0,6+3,7+9,7 &= d \\ 14 &= d \end{aligned}$$

Die Koordinatenform der Ebene E lautet also:

$E:\ 2\cdot x_1+x_2+2\cdot x_3=14.$

(2)

▶ Berechnen des Schnittwinkels zwischen der Ebene E und der Bodenebene

Nun sollst du den **Schnittwinkel** zwischen der Ebenen E und der Bodenebene berechnen. Für den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen gilt dabei der folgende Zusammenhang:

$\cos\alpha=\dfrac{|n_1\circ n_2|}{|n_1|\cdot|n_2|}$ mit:

- n_1 und n_2: **Normalenvektoren** der Ebenen

Um den Schnittwinkel zwischen den Ebenen zu berechnen, benötigst du hier also zunächst die Normalenvektoren der betrachteten Ebenen. Den Normalenvektor der Ebenen E hast du oben bereits bestimmt.
Über die Bodenebene weißt du, dass diese **parallel** zur x_1x_2-Ebene ist. Finde also einen Normalenvektor für die x_1x_2-Ebene, um hier einen Normalenvektor für die Bodenebene angeben zu können.

1. Schritt: Bestimmen eines Normalenvektors für die Bodenebene

Da die Bodenebene parallel zur x_1x_2-Ebene ist, zeigt ein Normalenvektor dieser Ebene **in x_3-Richtung**. Ein möglicher Normalenvektor wäre hier also:

$$\overrightarrow{n_B}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Berechnen des Schnittwinkels

Setze nun die Normalenvektoren $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{n_B}$ in den oben gezeigten Zusammenhang ein, um den Schnittwinkel zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{|n\circ n_B|}{|n|\cdot|n_B|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{2\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{1}} \\ \cos\alpha &= \frac{2}{3} \qquad |\cos^{-1} \\ \alpha &= 48,19^\circ \end{aligned}$$

Der Schnittwinkel zwischen den Ebenen ist also 48,19°.

(3)

▶ Berechnen des Abstands des Punktes *S* von der Ebene *E*

Zuletzt sollst du hier den Abstand des Punktes S mit $S(-0,3 \mid 3,85 \mid 4,7)$ von der Ebene E berechnen. Beachte dabei, dass hier eine Längeneinheit **einem Meter** in der Wirklichkeit entspricht.
Den Abstand $d(E;P)$ zwischen einem Punkt und einer Ebene berechnest du im Allgemeinen über die **Hessesche Normalform**, welche sich wie folgt angeben lässt:

$$d(E;P) = \left| \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - d}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right| \quad \text{mit:}$$

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des **Normalenvektors** der Ebene E
- x_1, x_2 und x_3: **Koordinaten** des Punktes P
- d: **Konstante** aus der Ebenengleichung

Setze also die Informationen aus der Ebenengleichung sowie die Koordinaten von S oben ein, um hier den gesuchten Abstand zu bestimmen.

Der Abstand $d(E;S)$ ergibt sich nun wie folgt:

$$d(E;S) = \left| \frac{2 \cdot (-0,3) + 1 \cdot 3,85 + 2 \cdot 4,7 - 14}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{-0,6 + 3,85 + 9,4 - 14}{\sqrt{9}} \right| = \frac{1,35}{3} = 0,45$$

Der Abstand zwischen dem Punkt S und der Ebene E beträgt also 0,45 m bzw. 45 cm.

b)

(1)

▶ Zeigen, dass der Lotfußpunkt der Mittelpunkt *M* des Glasrandkreises ist

Nun wird das **Lot** von S aus auf die Ebene E gefällt. Du sollst dabei zeigen, dass der Lotfußpunkt der **Mittelpunkt *M*** des Glasrandkreises ist. Weiterhin sollst du hier dann den **Radius** des Glasrandkreises bestimmen.
Beginne damit die Koordinaten von M zu bestimmen. Willst du diese bestimmen, so stellst du im ersten Schritt die **Lotgerade *l*** auf. Die Lotgerade l besitzt dabei als **Stützvektor** den Ortsvektor des Punktes S, da von diesem Punkt aus das Lot auf die Gerade gefällt wird. Außerdem verläuft diese **orthogonal** zur Ebene E.
Hast du die Lotgerade l bestimmst, so schneidest du diese mit der Ebene E in Koordinatenform. Der resultierende **Schnittpunkt** entspricht dann dem Punkt M.
Beachte beim Punkt M, dass dieser zu jedem Punkt auf dem Glasrandkreis den **gleichen Abstand** besitzen muss. Bestimme so den Radius und zeige, dass M auch wirklich der Mittelpunkt des Kreises ist.
Gehe beim Lösen der Aufgabe also so vor:

- Stelle die **Lotgerade** auf
- **Schneide** die Lotgerade mit der Ebene E in Koordinatenform
- Bestimme den Radius und zeige, dass M der **Mittelpunkt** des Kreises ist

1. Schritt: Aufstellen der Lotgerade *l*

Von oben weißt du, dass der Stützvektor der Lotgeraden l der Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ des Punktes S sein muss. Da l **orthogonal** zur Ebenen E verlaufen muss, wählst du als Richtungsvektor hier den **Normalenvektor $\overrightarrow{n}$** der Ebene E:

$$l: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 3,85 \\ 4,7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von *M*

Forme l zunächst in einen von t abhängigen Vektor um und setze diesen für x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatenform der Ebene E ein, um so den zum Mittelpunkt M zugehörigen Parameterwert von t zu bestimmen. Mit diesem kannst du dann die Koordinaten von M bestimmen.

$$l: \overrightarrow{x_l} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 3,85 \\ 4,7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 + 2 \cdot t \\ 3,85 + t \\ 4,7 + 2 \cdot t \end{pmatrix}$$

Setze nun für x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatenform der Ebene E ein:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-0,3 + 2 \cdot t) + (3,85 + t) + 2 \cdot (4,7 + 2 \cdot t) &= 14 \\ -0,6 + 4 \cdot t + 3,85 + t + 9,4 + 4 \cdot t &= 14 \\ 12,65 + 9 \cdot t &= 14 \quad \mid -12,65 \\ 9 \cdot t &= 1,35 \quad \mid : 9 \\ t &= 0,15 \end{aligned}$$

Setze nun $t = 0,15$ in die Geradengleichung von l ein, um die Koordinaten von M zu bestimmen:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 3,85 \\ 4,7 \end{pmatrix} + 0,15 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von M sind also: $M(0 \mid 4 \mid 5)$.

3. Schritt: Zeigen, dass *M* der Mittelpunkt ist und Radius bestimmen

Von den Punkten A, B und C weißt du, dass diese **auf dem** Glasrand liegen. Willst du nun zeigen, dass der Punkt M der Mittelpunkt des Kreises ist, so musst du zeigen, dass M zu diesen Punkten jeweils den **gleichen Abstand** besitzt. Der Abstand entspricht dann auch dem Radius r des Kreises.

- $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0,3 \\ 3,7 \\ 4,85 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0,3 \\ -0,3 \\ 0,15 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0,3^2 + (-0,3)^2 + 0,15^2} = 0,45$
- $\left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -0,15 \\ 3,7 \\ 5,3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -0,15 \\ -0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-0,15)^2 + (-0,3)^2 + 0,3^2} = 0,45$
- $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -0,3 \\ 4,3 \\ 5,15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,3 \\ 0,15 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-0,4)^2 + 0,3^2 + 0,15^2} = 0,45$

Wie du oben sehen kannst, besitzt der Mittelpunkt M zu den Punkte A, B und C jeweils den **gleichen Abstand**. Damit hast du gezeigt, dass der Punkt M auch wirklich der Mittelpunkt M des Kreises ist. Weiterhin besitzt der Kreis einen Radius von $r = 0,45\,\text{m}$.

(2)

▸ Bestimmen der Koordinaten des Fußpunktes *F*

Hier sollst du nun die Koordinaten des **Fußpunktes *F*** bestimmen. Der Fußpunkt F liegt am Ende des **1 m** langen Glasmodellstiels, der in Richtung der Verlängerung der Strecke $\overline{MS}$ verläuft.
Das bedeutet hier, dass der Punkt S **einen Meter** vom Punkt F **entfernt** liegt. Die Richtung von S zu F entspricht dabei der Richtung von M zu S.
Die Koordinaten von F bestimmst du hier über eine **Vektorenkette**. Bestimme dazu zunächst den Vektor $\overrightarrow{MS}$ und **normiere** diesen. Setze den normierten Vektor $\overrightarrow{MS}_0$ so an $\overrightarrow{OS}$ an, dass du $\overrightarrow{OF}$ erhältst. Beachte dabei, dass die Länge der Strecke $\overline{SF}$ einen Meter betragen muss.

1. Schritt: Bestimmen des normierten Vektors $\overrightarrow{MS}_0$

Der normierte Vektor $\overrightarrow{MS}_0$ ergibt sich, in dem du $\overrightarrow{MS}$ bestimmst du diesen durch die **Länge des Vektors** teilst:

$$\overrightarrow{MS}_0=\frac{\overrightarrow{MS}}{\left|\overrightarrow{MS}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}-0,3\\3,85\\4,7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-0,3\\3,85\\4,7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}-0,3\\-0,15\\-0,3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-0,3\\-0,15\\-0,3\end{pmatrix}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}-0,3\\-0,15\\-0,3\end{pmatrix}}{\sqrt{(-0,3)^2+(-0,15)^2+(-0,3)^2}}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}-0,3\\-0,15\\-0,3\end{pmatrix}}{0,45}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von *F*

Die Koordinaten von F bestimmst du nun, in dem du den Vektor $\overrightarrow{MS}_0$ am Ortsvektor OS in einer Länge von 1 ansetzt. Berechne hier also wie folgt:

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OS}+1\cdot\overrightarrow{MS}_0=\begin{pmatrix}-0,3\\3,85\\4,7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{29}{30}\\\frac{211}{60}\\\frac{121}{30}\end{pmatrix}$$

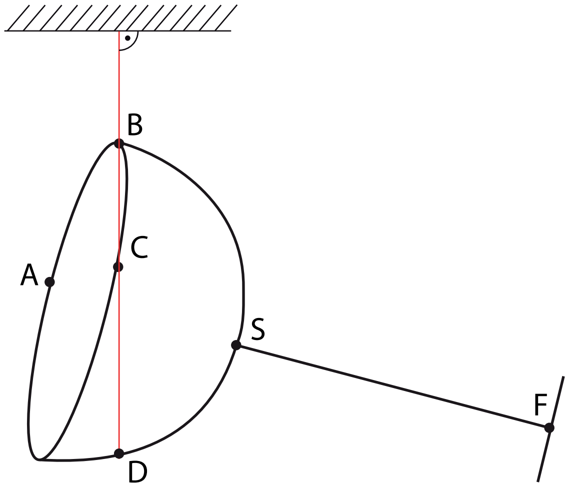
Die Koordinaten des Fußpunktes F sind: $F\left(-\frac{29}{30}\mid\frac{211}{60}\mid\frac{121}{30}\right)$.

c)

(1)

▸ Bestimmen der Koordinaten des Befestigungspunktes *D*

Der Aufgabenstellung kannst du hier nun entnehmen, dass das Glasmodell an einer **orthogonal zur Decke** verlaufenden geraden Stange aufgehängt ist. Diese Stange durchstößt dabei das Glasmodell im Punkt B und wird an einem weiteren Punkt D des Glases befestigt. Deine Aufgabe ist es nun, die **Koordinaten** dieses **Punktes *D*** zu bestimmen.
Verläuft nun eine Stange orthogonal zur Decke durch den Punkt B, so muss diese zwangsläufig auf der **Halbkugel** auftreffen, die den Kelch des Glases repräsentiert, das siehst du an der in der Aufgabenstellung gegebenen Skizze.



Stelle also zunächst eine **Kugelgleichung** der **Halbkugel K** auf, welche den Kelch repräsentiert. Die allgemeine Kugelgleichung lautet dabei:
$K:\ (x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2=r^2$ mit:

- m_1, m_2 und m_3: Koordinaten des **Mittelpunktes** der Kugel
- r: **Radius** der Kugel

Hast du eine Kugelgleichung von K bestimmt, so bestimme im nächsten Schritt eine **Gerade**, die die **Richtung der Stange** repräsentiert. **Schneide** anschließend diese Gerade mit der Kugel K und bestimme so den Punkt D.

1. Schritt: Aufstellen der Kugelgleichung

Aus dem Aufgabenteil zuvor weißt du, dass der **Abstand** zwischen M und S gerade dem **Radius** der Kugel entspricht. Also ist M auch der **Mittelpunkt der Kugel**. Mit $M(0\mid 4\mid 5)$ und $r=0,45$ ergibt sich die Kugelgleichung von K zu:

$$K:\ (x_1-0)^2+(x_2-4)^2+(x_3-5)^2=0,45^2 \ \Leftrightarrow\ x_1^2+(x_2-4)^2+(x_3-5)^2=0,45^2$$

2. Schritt: Bestimmen der Geraden, die die Stange repräsentiert

Da die Stange orthogonal zur Decke verläuft und diese **parallel** zur x_1x_2-Ebene ist, muss der Richtungsvektor der Geraden s, die die Stange repräsenitert, **in Richtung der x_3-Achse** zeigen. Da Punkt D **unterhalb** des Punktes B zeigt, sollte auch der Richtungsvektor in **negative** x_3-Richtung zeigen.
Mit $\overrightarrow{OB}$ als Stützvektor ergibt sich die Gerade s also zu:

$$s:\ \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}-0,15\\3,7\\5,3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

3. Schritt: Ermitteln der Koordinaten von D

Schneide nun Gerade s und Kugel K, um die Koordinaten von D zu bestimmen. Gehe dabei vor wie im Aufgabenteil b:

$$s:\ \overrightarrow{x}_s=\begin{pmatrix}-0,15\\3,7\\5,3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,15\\3,7\\5,3-r\end{pmatrix}$$

Einsetzen für x_1, x_2 und x_3 ergibt:

$$\begin{aligned}(-0,15)^2+(3,7-4)^2+(5,3-r-5)^2&=0,45^2\\ 0,0225+0,09+(0,3-r)^2&=0,2025\\ 0,1125+0,09-0,6\cdot r+r^2&=0,2025\\ 0,2025-0,6\cdot r+r^2&=0,2025 && \mid -0,2025\\ -0,6\cdot r+r^2&=0 && r\ \text{ausklammern}\\ r\cdot(-0,6+r)&=0\end{aligned}$$

Nach dem **Satz vom Nullprodukt** ergibt sich, dass die erste Lösung der Gleichung $r_1=0$ sein muss.

$$\begin{aligned}-0,6+r&=0 && \mid +0,6\\ r&=0,6\end{aligned}$$

Setzt du nun $r_1=0$ in die Geradengleichung von s ein, so erhältst du die Koordinaten von B. Die Koordinaten von D ergeben sich durch Einsetzen von $r_2=0,6$:

$$\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}-0,15\\3,7\\5,3\end{pmatrix}+0,6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,15\\3,7\\4,7\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von D sind also $D(-0,15\mid 3,7\mid 4,7)$.

(2)

▸ Nachweisen, dass der Sicherheitsabstand für den Punkt *B* eingehalten wird

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass entlang der Geraden g mit

$$g:\ \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}4,7\\4,6\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3,7\\2,6\\0\end{pmatrix}$$

eine Lichterkette aufgehängt werden soll.
Du sollst nun nachweisen, dass für den Punkt B des Glasmodells ein **Sicherheitsabstand** zur Lichterkette von **mindestens 2 m** eingehalten wird. Hier ist es also deine Aufgabe, zu zeigen, dass der **Abstand** zwischen **Punkt *B*** und der **Geraden *g*** mindestens 2 m beträgt. Hier musst du also den **kürzesten Abstand** zwischen Punkt B und der Geraden g bestimmen und zeigen, dass dieser kleiner als 2 m ist. Gehe dabei so vor:

- Bestimme **Hilfsebene *H*** in Koordinatenform:
  - Der Richtungsvektor der Geraden g entspricht dem **Normalenvektor** von H
  - H **enthält** den Punkt B
- Bestimme den **Schnittpunkt *P*** der **Hilfsebenen *H*** und **Geraden *g***
- Die Länge des Vektors $\overrightarrow{BP}$ entspricht dem **kürzesten Abstand** zwischen g und B

1. Schritt: Bestimmen der Hilfsebenen *H* in Koordinatenform

Nach oben ergibt sich die Koordinatengleichung der Hilfsebenen mit $\overrightarrow{n}_H = \begin{pmatrix} 3,7 \\ 2,6 \\ 0 \end{pmatrix}$ zunächst zu:

- $H: 3,7 \cdot x_1 + 2,6 \cdot x_2 = d$

Bestimme d nun über eine **Punktprobe** mit B:

$$\begin{aligned} 3,7 \cdot (-0,15) + 2,6 \cdot 3,7 &= d \\ 9,065 &= d \end{aligned}$$

Die Koordinatenform der Hilfsebenen H lautet hier also:

$$H:\ 3,7 \cdot x_1 + 2,6 \cdot x_2 = 9,065$$

2. Schritt: Bestimmen des Schnittpunkts *P*

Gehe vor wie oben, um den Schnittpunkt P von Ebene H und Gerade g zu bestimmen:

$$g: \overrightarrow{x}_g = \begin{pmatrix} 4,7 \\ 4,6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3,7 \\ 2,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,7 + 3,7 \cdot s \\ 4,6 + 2,6 \cdot s \\ 5 \end{pmatrix}$$

Setze nun für x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatenform von H ein und berechne wie folgt:

$$\begin{aligned} 3,7 \cdot (4,7 + 3,7 \cdot s) + 2,6 \cdot (4,6 + 2,6 \cdot s) &= 9,065 \\ 17,39 + 13,69 \cdot s + 11,96 + 6,76 \cdot s &= 9,065 \\ 29,35 + 20,45 \cdot s &= 9,065 \qquad \mid -29,35 \\ 20,45 \cdot s &= -20,285 \qquad \mid : 20,45 \\ s &= -0,991932 \end{aligned}$$

Die Koordinaten von P erhältst du nun, indem du $s = -0,991932$ in die Geradengleichung von g einsetzt:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4,7 \\ 4,6 \\ 5 \end{pmatrix} + (-0,991932) \cdot \begin{pmatrix} 3,7 \\ 2,6 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,03 \\ 2,02 \\ 5 \end{pmatrix} \implies P(1,03 \mid 2,02 \mid 5)$$

3. Schritt: Berechnen des kürzesten Abstands

Der kürzeste Abstand zwischen g und Punkt B ergibt sich nun über die **Länge des Vektors** $\overrightarrow{BP}$:

$$|\overrightarrow{BP}| = \left| \begin{pmatrix} 1,03 \\ 2,02 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,15 \\ 3,7 \\ 5,3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1,18 \\ -1,68 \\ -0,3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1,18^2 + (-1,68)^2 + (-0,3)^2} \approx 2,07$$

Da der kürzeste Abstand zwischen B und P 2,07 m entspricht, wird hier der Sicherheitsabstand von 2 m eingehalten.

d)

▶ Zeigen, dass alle Punkte auf dem Glasrandkreis liegen

Hier hast du die Menge aller Punkte X gegeben. Für den Ortsvektor $\overrightarrow{OX}$ gilt dabei:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \sin(t)\cdot\overrightarrow{MA} + \cos(t)\cdot\overrightarrow{MB} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Nun sollst du zeigen, dass alle diese Punkt **auf dem Glasrandkreis** liegen.
Willst du hier zeigen, dass alle Punkte X auf dem Glasrandkreis liegen, so musst du hier zeigen, dass die **Abstände** der Punkte X zum **Mittelpunkt *M*** des Kreises dem **Radius *r*** des Kreises, mit $r = 0,45$ entsprechen.
Bilde dazu den Vektor $\overrightarrow{MX}$ und zeige mit Hilfe des **Betrags**, dass dessen Länge, **unabhängig von *t***, dem Radius entspricht.

Hier solltest du wie folgt vorgegangen sein:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OM} + \sin(t)\cdot\overrightarrow{MA} + \cos(t)\cdot\overrightarrow{MB} && \mid -\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM} &= \sin(t)\cdot\overrightarrow{MA} + \cos(t)\cdot\overrightarrow{MB} && \mid -\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{MX} &= \sin(t)\cdot\overrightarrow{MA} + \cos(t)\cdot\overrightarrow{MB} \end{aligned}$$

Bilde nun auf der rechten und linken Seite der Gleichung den **Betrag**. Beachte dabei, dass das Resultat der Summe auf der linken Seite ein **Vektor** ist, weswegen du hier den **Betrag der Summe**, wie unten zu sehen ist, bilden musst:

$$\left|\overrightarrow{MX}\right| = \sqrt{\left(\sin(t)\cdot\overrightarrow{MA}\right)^2 + \left(\cos(t)\cdot\overrightarrow{MB}\right)^2}$$

Da die Punkte A und B auf dem Kreis liegen, müssen die Längen von $\overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{MB}$ gerade dem Radius r entsprechen:

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{MX}\right| &= \sqrt{(\sin(t)\cdot r)^2 + (\cos(t)\cdot r)^2} \\ \left|\overrightarrow{MX}\right| &= \sqrt{\sin^2(t)\cdot r^2 + \cos^2(t)\cdot r^2} \\ \left|\overrightarrow{MX}\right| &= \sqrt{r^2\cdot(\sin^2(t) + \cos^2(t))} && \text{mit: } \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \\ \left|\overrightarrow{MX}\right| &= \sqrt{r^2\cdot 1} \\ \left|\overrightarrow{MX}\right| &= r \end{aligned}$$

Da du hier gezeigt hast, dass die Länge von $\overrightarrow{MX}$ **unabhängig von *t*** gerade dem Radius $r = 0,45$ des Kreises entspricht. Hast du hier gezeigt, dass alle Punkte X auf dem Glasrandkreis liegen.