Aufgabenstellung:

Gegeben Sind im Raum $\mathbb{R}^3$ die Punkte $A(3 \mid 0 \mid 2)$, $B(1 \mid -2 \mid 2)$, und $C(5 \mid -2 \mid 2)$ sowie die

Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

a) (1) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist. (20P)

(2) Berechnen Sie bezüglich der Abbildung f die Koordinaten der Bildpunkte A', B' und C' zu den Punkten A, B und C und untersuchen Sie, ob das Bilddreieck $A'B'C'$ ebenfalls rechtwinklig und gleichschenklig ist.

(3) Prüfen Sie, ob die Dreiecke ABC sowie $A'B'C'$ bezüglich einer Grundebene des Koordinatensystems eine besondere Lage einnehmen.

Gegeben sei die Ebene $E : 2x_1 - x_2 = 0$ des $\mathbb{R}^3$.

b) (1) Begründen Sie, dass die Ebene E durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft. (17P)

(2) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zwei nicht kollineare Richtungsvektoren der Ebene E sind.

(3) Bestimmen Sie $f(\vec{v}_1)$ und $f(\vec{v}_2)$.

(4) Weisen Sie nach, dass jeder Punkt der Ebene E durch die Abbildung f auf sich selbst abgebildet wird.

c) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$. (13P)

(1) Bestimmen Sie das Bild g' der Geraden g bzgl. der Abbildung f und untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und g'.

(2) Sei h eine beliebige zu g parallel verlaufende Gerade und sei h' das Bild von h bzgl. der Abbildung f.
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von h und ihrer Bildgeraden h'.