a) **► Grenzwerte von $f(x)$ angeben** (2P)

Überlege dir zunächst, was es heißt, das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ zu untersuchen:

- Wenn du das Verhalten für $x \to \infty$ betrachtest, so fragst du: Wie entwickeln sich die Funktionswerte $f(x)$, wenn ich für x sehr große positive Zahlen einsetze?
- Wenn du das Verhalten für $x \to -\infty$ betrachtest, so ist die Frage: Wie entwickeln sich die Funktionswerte $f(x)$, wenn ich für x betragsmäßig sehr große negative Zahlen einsetze?

Wichtig ist dabei auch das Verhalten der e-Funktion für $x \to \pm\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = \infty; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$

Wenn der lineare Term $\left(\frac{1}{2}x\right)$ und der exponentielle Term (e^{x+1}) unterschiedliche Grenzwerte haben, so setzt sich der exponentielle Term durch.

b) **► Art und Lage des Extrempunkts von G_f ermitteln** (15P)

Du sollst die lokalen Extrempunkte von G_f bestimmen. Dazu kannst du so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die ersten beiden Ableitungen f' und f'' nach der Produktregel.
- Notwendiges Kriterium: Setze $f'(x) = 0$ und löse die Gleichung auf. So erhältst du die potentiellen Extremstellen.
- Hinreichendes Kriterium: Setze die potentiellen Extremstellen in die zweite Ableitung f'' ein. Wenn sich ein positiver Wert ergibt, so liegt ein Minimum vor; wenn sich ein negativer Wert ergibt, dann liegt ein Maximum vor.
- Setze die Extremstellen zuletzt in die Funktionsgleichung von f ein und berechne so die zugehörigen y-Koordinaten.

► Parallelität der Wendetangente zur Geraden h nachweisen

Du sollst zeigen, dass die Tangente, welche im Wendepunkt W an den Graphen G_f anliegt, parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y = \frac{1}{2\mathrm{e}}x$ verläuft. Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt, aber du kennst dessen Koordinaten noch nicht.

Du kannst deshalb so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die Koordinaten des Wendepunkts. Da du weißt, dass G_f genau einen Wendepunkt hat, musst du das **hinreichende Kriterium** nicht untersuchen.
- Zwei Geraden sind parallel, wenn sie die gleiche Steigung haben. Die Steigung der Geraden h ist bekannt, du kannst sie aus der Funktionsgleichung ablesen. Berechne nun also die Steigung der Tangente t an den Graphen G_f im Wendepunkt W. Dabei gilt: Die Steigung der Tangente ist dieselbe wie die Steigung von f im Berührpunkt.

c) **▶ Einzigen gemeinsamen Punkt nachweisen** (7P)

Lies die Aufgabenstellung gut durch. Du sollst nicht nur zeigen, dass der Koordinatenursprung $O\,(0 \mid 0)$ ein gemeinsamer Punkt der beiden Graphen ist, sondern dass er der **einzige** gemeinsame Punkt ist. Du kannst deshalb so vorgehen:

- Setze die Funktionsterme von f und g gleich: $f(x) = g(x)$.
- So berechnest du die Schnittstellen der beiden Funktionen. Zeige, dass $x = 0$ sich als **einzige** Lösung ergibt und dass die zugehörige y-Koordinate auch Null ist. Dann ist der Ursprung als einziger gemeinsamer Punkt nachgewiesen.

▶ Gemeinsame Tangente nachweisen

Bekannt ist, dass die beiden Graphen sich im Ursprung $O\,(0 \mid 0)$ schneiden. Die Tangenten, die in diesem Punkt an die beiden Graphen anliegen, verlaufen also ebenfalls durch den Koordinatenursprung und schneiden hier die y-Achse. Die beiden Tangenten besitzen also auf jeden Fall mit $c = 0$ den gleichen y-Achsenabschnitt.

Es bleibt die Frage, ob die beiden Tangenten auch die gleiche **Steigungen** haben. Die Steigung der Tangente ist dieselbe wie die Steigung der Funktion im Berührpunkt. Die Steigung einer Funktion wird dir immer durch die erste Ableitung gegeben. Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst den Term $g'(x)$ nach der Produktregel.
- Berechne $f'(0)$ und $g'(0)$ und zeige, dass sich der gleiche Wert ergibt. Dann ist nachgewiesen, dass die beiden Graphen in diesem Punkt auch die gleichen Tangenten haben.

d) **▶ Flächeninhalt eines Drachens berechnen** (7P)

Die Symmetrieachse des Drachen ist die (senkrechte) Gerade $x = -3$. In der Abbildung ist also genau die **Hälfte** der Drachenfläche abgebildet.

Diese Fläche wird begrenzt durch die Graphen G_f, G_g und die Gerade $x = -3$. Dabei verläuft der Graph G_g **oberhalb** des Graphen G_f. Gesucht ist der Flächeninhalt des Drachens. Du kannst also so vorgehen:

- Berechne mit dem **Hauptsatz der Integralrechnung** den Flächeninhalt der abgebildeten Fläche.
- Verdopple diesen Flächeninhalt, weil nur die Hälfte des Drachens abgebildet ist.
- Beachte zuletzt den Maßstab: 3 LE in der Abbildung stehen für 1 m in der Realität.

e) **▶ Mögliche Drachenform zeichnen** (9P)

Die **Hälfte** der neuen Drachenform soll ein Dreieck sein, welches anschließend an der Gerade $x = -3$ gespiegelt wird. Einer der Eckpunkte des Dreiecks ist der Koordinatenursprung mit $O\,(0 \mid 0)$; ein weiterer Eckpunkt ist der Schnittpunkt des Graphen G_g mit der Geraden $x = -3$. Dieser Schnittpunkt ist in der Anlage bereits eingezeichnet, er ist die Spitze des alten (und auch des neuen) Drachens.

Der dritte Schnittpunkt Q soll ebenfalls auf der Geraden $x = -3$ liegen, also senkrecht unterhalb der Spitze. Seine y-Koordinate soll dabei zwischen 0 und 2 liegen. Wähle für dieses Beispiel einen Wert wie $y_Q = 1$.

► Koordinaten von Q berechnen

Die Koordinaten von Q sollen so bestimmt werden, dass die Drachenfläche einen Inhalt von $1\,\text{m}^2$ besitzt. Von oben weißt du: $1\,\text{m}^2$ in der Realität sind 9 FE in der Abbildung. Insgesamt soll die Drachenfläche also 9 FE groß sein.

Du kannst aufgrund der Symmetrie zur Geraden $x = -3$ wieder nur eine Hälfte des Drachens betrachten; wir wählen die rechte Hälfte. Diese Hälfte ist ein stumpfwinkliges **Dreieck**:

- Die **Höhe** liegt außerhalb des Dreiecks; du kannst sie auf der x-Achse einzeichnen. Unabhängig von der genauen Lage von Q ist die Höhe $h = 3\,\text{LE}$.
- Die **Grundseite** des Dreiecks entspricht der Seite $g = \overline{PQ}$.
- Für den Flächeninhalt A des Dreiecks gilt dann: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Du benötigst also die Koordinaten des Punkts P. Er ist der Schnittpunkt des Graphen G_g mit der Geraden $x = -3$.

Gehe z.B. so vor:

- Berechne zunächst die y-Koordinate von P.
- Bestimme dann einen Term für die Länge $\overline{PQ}$.
- Setze diesen Term sowie $h = 3$ ein in die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A. Der Flächeninhalt des Dreiecks soll 4,5 FE betragen. Setze also $A = 4,5$ und löse nach y_Q auf.