a) (1) ▶ **Bestimmen des Mittelpunkts M und des Radius R der Kugel K** (9P)

Laut Aufgabenstellung besitzt Kugel K folgende Gleichung in Koordinatenform:
$K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 20 \cdot x_1 - 20 \cdot x_2 - 48 \cdot x_3 + 632 = 0.$
Deine Aufgabe ist es nun, mit Hilfe dieser Gleichung für Kugel K deren Mittelpunkt M und Radius R zu ermitteln. Um Mittelpunkt M und Radius R von K bestimmen zu können, solltest du die angegebene Gleichung für Kugel K von der gegebenen Form in die allgemeine Koordinatenform für eine Kugelgleichung umformen. Die allgemeine Koordinatenform einer Kugelgleichung hat dabei folgende Gestalt:
$K: (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = R^2$ mit:

- m_1, m_2 und m_3: Koordinaten des Kugelmittelpunkts M der Kugel K.
- R: Radius der Kugel K.

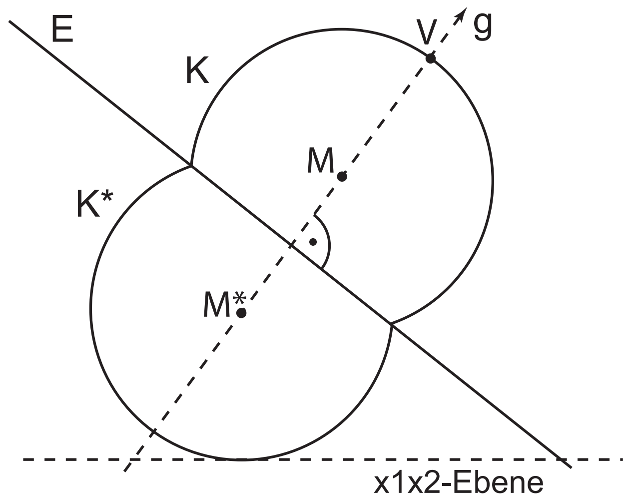
Folgende Bestandteile der allgemeinen Kugelgleichung in Koordinatenform entsprechen der zweiten binomischen Formel:
$(x_1 - m_1)^2$; $(x_2 - m_2)^2$ und $(x_3 - m_3)^2$.
Willst du also die angegebene Kugelgleichung für Kugel K in die allgemeine Koordinatenform überführen, so geschieht dies über geschickte quadratische Ergänzungen so, dass die dafür notwendigen Binome gebildet werden können. Hast du die notwendigen Binome gebildet, so kannst du Koordinaten des Kugelmittelpunkts M und den Radius R der Kugel K der entstandenen Kugelgleichung in Koordinatenform entnehmen.

(2) ▶ **Berechnen der Koordinaten des Ventilpunkts V**

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Hüpfball schräg auf dem Fußboden, repräsentiert durch die x_1x_2-Ebene, liegt. Das Ventil, beschrieben durch den unbekannten Punkt V, welches dazu benutzt wird den oberen Ball des Hüpfballs aufzupumpen, liegt im **oberen** Schnittpunkt der Achse durch die Ballmittelpunkte mit der Kugel K. Die Achse, auf welcher die Ballmittelpunkte und der Ventilpunkt V liegen, fungiert hier als Symmetrieachse des Hüpfballs. Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten des Ventilpunkts V zu berechnen.

Der Aufgabenstellung kannst du weiterhin entnehmen, dass die untere Kugel K^* durch Spiegelung der oberen Kugel K an der Ebenen E, gegeben in Parameterform, entsteht. Das bedeutet, dass die oben beschriebene Symmetrieachse senkrecht zur Ebenen E verläuft.

Da die Symmetrieachse, auf welcher die Ballmittelpunkte M und M^* und der Ventilpunkt V liegen, senkrecht zur Ebenen E verläuft, besitzt diese gerade die Richtung des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E. Willst du nun die Koordinaten des Ventilpunkts V berechnen, so bestimmst du zunächst eine Gerade g, welche durch den bekannten Mittelpunkt M der oberen Kugel K verläuft und die Richtung des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E besitzt. Hast du diese Gerade g bestimmt, so berechnest du im nächsten Schritt die Schnittpunkte von g und K und bestimmst so den unbekannten Ventilpunkt V.



Gehe also Schrittweise vor:

1. Schritt: Bestimmen des Normalenvektors der Ebene E
2. Schritt: Ermitteln einer Geradengleichung von g
3. Schritt: Schneiden der Geraden g mit der Kugel K

(3) ▶ **Bestimmen des Winkels α, den die Symmetrieachse mit der x_1x_2 - Ebene einschließt**

Deine Aufgabe ist es jetzt, den Winkel α zu berechnen, welche die Symmetrieachse, beschrieben durch die Gerade g, mit der x_1x_2 - Ebene einschließt. Das heißt, hier gilt es also einen Winkel α zwischen einer Ebenen und einer Geraden zu berechnen, was über folgende Formel erreicht werden kann:
$\sin(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|}$ mit

- $\overrightarrow{u}$: Richtungsvektor der betrachteten Geraden, hier also Richtungsvektor der Geraden g.
- $\overrightarrow{n}$: Normalenvektor der betrachteten Ebene, hier also Normalenvektor der x_1x_2-Ebenen.

Bevor du also den Winkel α berechnen kannst, benötigst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der x_1x_2-Ebene. Jeder Punkt, welcher in der x_1x_2-Ebene liegt, hat eine x_3-Koordinate von Null, die Ebenengleichung der x_1x_2-Ebene in Koordinatenform ist also:
$x_3 = 0$.

b) (1) ▶ **Zeigen, dass Kugel K und Ebene E sich schneiden** (11P)

Betrachtet werden nun Kugel K und Ebene E, wobei gezeigt werden soll, dass diese sich schneiden. Kugel K mit Radius $R = 12$ und Mittelpunkt $M(10\,|\,10\,|\,24)$ besitzt folgende Kugelgleichung in Koordinatenform (siehe a):
$K: (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 + (x_3 - 24)^2 = 12^2$.
Ebene E ist laut Aufgabenstellung wie folgt definiert:

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Im Aufgabenteil a hast du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmt, dieser war:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beim Lösen dieser Aufgabe ist es weiterhin sinnvoll, zunächst eine Ebenengleichung der Ebenen E in Koordinatenform zu ermitteln. Die Koordinatenform einer Ebenengleichung lautet allgemein:

$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ mit:

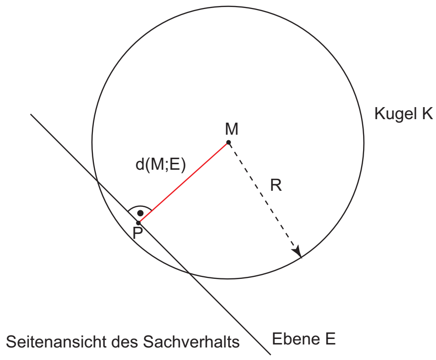
- n_1, n_2 und n_3: Einträge des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ der Ebenen E.
- d: Über Punktprobe zu bestimmende Konstante.

Setze also den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ für n_1, n_2 und n_3 in die Ebenengleichung von E in Koordinatenform ein und bestimme mit einem Punkt, von dem bekannt ist, dass dieser in Ebene E liegt, anschließend Konstante d. Hier wird beispielsweise der Stützvektor aus der Ebenengleichung der Ebenen E in Parameterform (siehe oben) dazu verwendet, um Konstante d zu bestimmen:

$$x_1 + x_2 + x_3 = d \qquad \text{mit } x_1 = 2,\ x_2 = 4 \text{ und } x_3 = 20$$
$$2 + 4 + 20 = d \quad \Leftrightarrow \quad d = 26$$

Eine Ebenengleichung der Ebenen E in Koordinatenform ist also: $E:\ x_1 + x_2 + x_3 = 26$

Zeige zunächst, dass Ebene E und Kugel K sich schneiden. Ob Kugel K und Ebene E sich schneiden, wird dabei festgelegt über den Abstand $d(M;E)$. Ist dieser Abstand zwischen Mittelpunkt M der Kugel K und einem bestimmten Punkt P, welcher in Ebene E liegt, kleiner als der Radius R von K, so schneiden sich Kugel K und Ebene E (siehe Rechts). Hier gilt es also zunächst einen Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene zu bestimmen.



Dabei gibt es zwei verschiedene Wege, den gesuchten Abstand $d(M;E)$ zu berechnen. Im Folgenden werden beide ausführlich behandelt:

►► Lösungsweg A: Hessesche Normalform

Mit der Hesseschen Normalform ist es möglich, den Abstand zwischen Punkten und Ebenen zu berechnen. Die Hessesche Normalform lautet:

$$\left| \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - e}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right| = d(E;P) \text{ mit:}$$

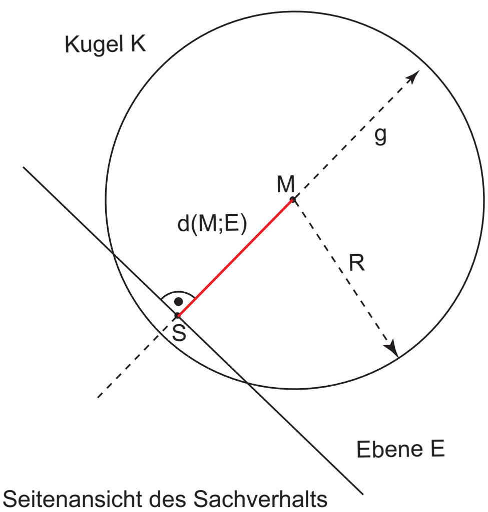
- n_1, n_2 und n_3: Einträge des Normalenvektors der betrachteten Ebene.
- e: Konstante der Ebenengleichung der betrachteten Ebene in Koordinatenform.
- x_1, x_2 und x_3: Koordinaten des Punktes, zu welchem der Abstand bestimmt werden soll.
- $d(E;P)$: Abstand zwischen Punkt und betrachteter Ebene.

Mit der Hesseschen Normalform bist du also in der Lage, den Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene zu berechnen. Schneiden sich Kugel K und Ebene E, so ist der Abstand $d(M;E)$ zwischen der Ebene E und Mittelpunkt M der Kugel K kleiner als der Radius r von Kugel K. Das heißt:
Ist der Abstand $d(M;E)$ zwischen Ebene E und Mittelpunkt M der Kugel K kleiner als $R = 12$ Längeneinheiten, so schneiden sich diese.

►► Lösungsweg B: Berechnen des Abstands zwischen E und K mit einer Geraden

Auch hier gilt wieder:
Ist der Abstand zwischen dem Mittelpunkt M der Kugel K und der Ebenen E kleiner als der Radius R der Kugel K, so schneiden sich Kugel K und Ebene E.

Willst du nun den Abstand zwischen Mittelpunkt M und der Ebenen E mit einer Geraden bestimmen, so definierst du im ersten Schritt eine Gerade. Diese Gerade besitzt Mittelpunkt M der Kugel K als Stützvektor und Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebenen E als Richtungsvektor, sie entspricht also einer Lotgeraden der Ebene E (**Gerade g aus vorherigem Aufgabenteil**).
Beim Berechnen des Abstands d zwischen Ebene E und Kugel K über Gerade g, bestimmst du zunächst den Schnittpunkt S dieser Geraden g und der Ebenen E, den sogenannten **Lotfußpunkt.**



Seitenansicht des Sachverhalts

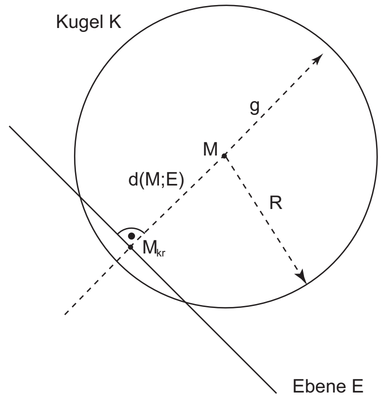
Im nächsten Schritt berechnest du dann den Abstand d zwischen Lotfußpunkt S und Mittelpunkt M von K über den Betrag des zugehörigen Vektors.

(2) **► Bestimmen des Mittelpunkts M_{kr} des Schnittkreises kr**

Nun sollst du die Koordinaten des Mittelpunkts M_{kr} des Schnittkreises kr der Ebene E und der Kugel K berechnen. Ausgehend davon, über welchen Weg (Lösungsweg A oder B) du oben den Abstand zwischen Kugel K und Ebene E berechnet hast, gibt es verschiedene Wege M_{kr} zu berechnen. Im Folgenden werden beide ausführlich behandelt:

1. Bestimmen von *kr* ausgehend von Lösungsweg A

Da bereits bekannt ist, dass sich Kugel K und Ebene E schneiden, kann davon ausgegangen werden, dass der Mittelpunkt M_{kr} des Schnittkreises kr auf einer Geraden liegt, welche durch den Mittelpunkt M von K und senkrecht zur Ebenen E verläuft (**Gerade g aus Aufgabenteil a**). Willst du also die Koordinaten von M_{kr} bestimmen, so schneidest du Gerade g mit der Ebene E (siehe rechts).



Seitenansicht des Sachverhalts

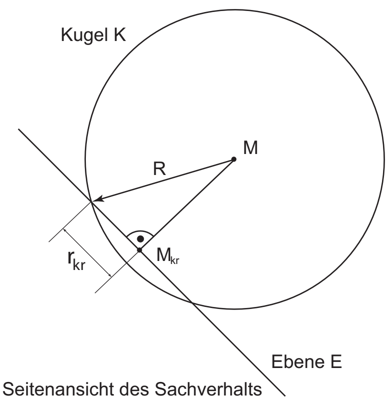
2. Bestimmen von *kr* ausgehend von Lösungsweg B

Beim Bestimmen des Abstands zwischen Ebene E und dem Kugelmittelpunkt M der Kugel K mit Hilfe einer Geraden hast du ein **Lot** von Punkt M aus auf die Ebene E gefällt. Dabei hast du die Koordinaten eines Lotfußpunktes S berechnet. Da der Mittelpunkt M_{kr} des Schnittkreises kr auf der Geraden liegt, welche durch den Mittelpunkt M der Kugel K und orthogonal zur Ebenen E verläuft (**Gerade g**), entspricht der Lotfußpunkt S dem Mittelpunkt M_{kr} des Schnittkreises S.

(3) ► **Berechnen des Flächeninhalts A_{kr} des Schnittkreises *kr***

Der Flächeninhalt A_{kr} des Schnittkreises kr berechnet sich über diese Formel:
$A_{kr} = \pi \cdot r_{kr}^2$.

Bevor du also den Flächeninhalt A_{kr} des Schnittkreises kr berechnen kannst, musst du dessen Radius r_{kr} berechnen. Der nebenstehenden Seitenansicht des Sachverhalts kannst du dabei entnehmen, dass Mittelpunkt M_{kr}, der Radius r_{kr} des Schnittkreises kr und Radius R der Kugel in einem rechtwinkligen Dreieck liegen.
Du kannst also mit dem Satz des Pythagoras den Radius r_{kr} des Schnittkreises kr berechnen.

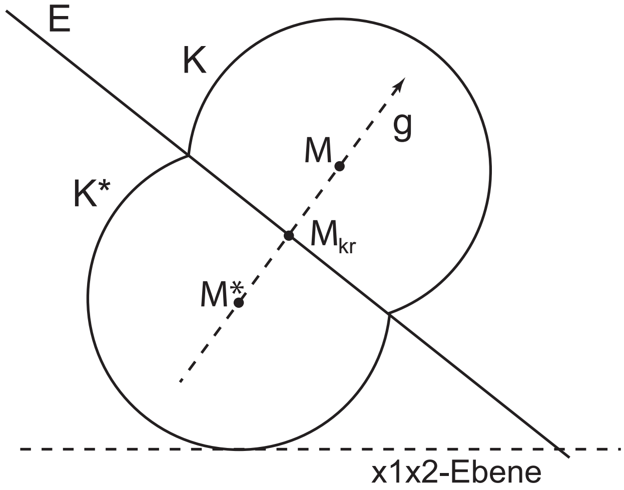


Seitenansicht des Sachverhalts

(4) ► **Bestimmen der Koordinaten des Mittelpunktes M^* der Kugel K^***

Hier ist es nun deine Aufgabe, die Koordinaten des Kugelmittelpunkts M^* der Kugel K^* zu berechnen. Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass Kugel K^* durch eine Spiegelung der Kugel K an der Ebene E entsteht. Beim Lösen dieser Aufgabe kann es sinnvoll sein, wenn du dir eine Skizze des Sachverhalts anfertigst.

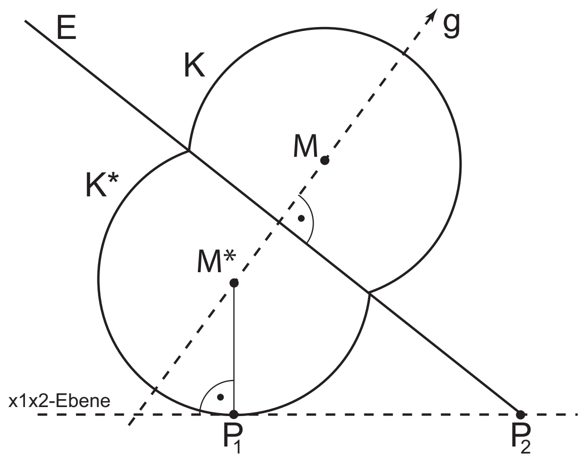
Da durch die Spieglung von K an E auch der Mittelpunkt M der Kugel K an der Ebene E gespiegelt wird, entsteht der Mittelpunkt M^* durch Spiegelung des Mittelpunkts M der Kugel K an der Ebene E. Wird der Punkt M an der Ebene E gespiegelt, so befindet sich der gespiegelte Punkt M^* und der Ausgangspunkt M auf einer Geraden. Diese Gerade verläuft dabei orthogonal zur Ebenen E und entspricht also der Geraden g aus dem Aufgabenteil a. Des Weiteren besitzt der gespiegelte Mittelpunkt M^* den selben Abstand zur Ebenen E, wie Mittelpunkt M von K.



c) ▶ **Bestimmen der beiden Punkte, in denen der Hüpfball den Boden berührt** (5P)

Deine Aufgabe ist es hier, die Koordinaten der Beiden Punkte zu berechnen, in denen der Hüpfball den Boden berührt. Wie oben schon erwähnt, wird der Boden hier durch die x_1x_2-Ebene repräsentiert. Beim Lösen dieser Aufgabe ist es sinnvoll, wenn du dir den Sachverhalt zunächst skizzierst. Eine beispielhafte Skizze ist unten zu sehen.

Wie du der nebenstehenden Skizze entnehmen kannst, berührt das „Zwischenteil" des Hüpfballs und die Kugel K^* die x_1x_2-Ebene. Der Punkt, in welchem die Kugel K^* die x_1x_2-Ebene berührt ist Punkt P_1. Der Mittelpunkt M^* der Kugel K^* liegt also, wie rechts zu sehen ist, senkrecht über dem Punkt P_1. Die Koordinaten von Punkt P_1 ermittelst du also über eine senkrechte Projektion des Mittelpunkts M^* auf die x_1x_2-Ebene. Punkt P_2 ist jener Punkt, an welchem das „Zwischenteil" des Hüpfballs, repräsentiert durch Ebene E, die x_1x_2-Ebene berührt.



Aus den vorherigen Aufgabenteilen ist dir die Gerade g bekannt. Diese Gerade g besitzt also Stützvektor den Mittelpunkt M der Kugel K und als Richtungsvektor den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E. Sie steht also senkrecht auf der Ebene E. Würde man ebenfalls Punkt M auf die x_1x_2-Ebene projizieren, so würden die Punkte P_1, P_2 und der projizierte Mittelpunkt M_p auf einer Geraden liegen. Diese Gerade entspricht der in die x_1x_2-Ebene projizierten Geraden g. Die Koordinaten des Punktes P_2 berechnest du, indem du zunächst Gerade g in die x_1x_2-Ebene projiziert. Hast du die projizierte Gerade g^* bestimmt, so entspricht der Schnittpunkt dieser Geraden g^* und der Ebene E dem gesuchten Berührpunkt P_2.

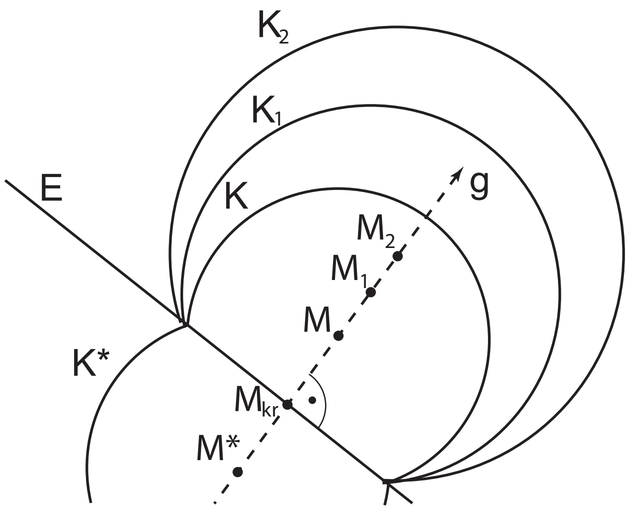
d) ► **Bestimmen einer Gleichung der Schar K_t** (5P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass beide Bälle sehr elastisch sind. Nun wird der obere Ball, beschrieben durch Kugel K weiter aufgepumpt. Da der obere Ball fest am Hüpfbrett befestigt ist, ändert sich die Aussparung in diesem nicht. Das heißt alle Kugeln, die den oberen Ball des Hüpfballs repräsentieren, besitzen den gleichen Schnittkreis mit der Ebene E. Diesen Schnittkreis kr hast du bereits in einem vorherigen Aufgabenteil bestimmt. Der untere Ball (Kugel K^*) verändert sich nicht durch das Aufpumpen des oberen Balls.
Deine Aufgabe ist es nun, eine Gleichung der Schar K_t aller Kugeln zu ermitteln, welche die Ebene E mit Schnittkreis kr schneiden.

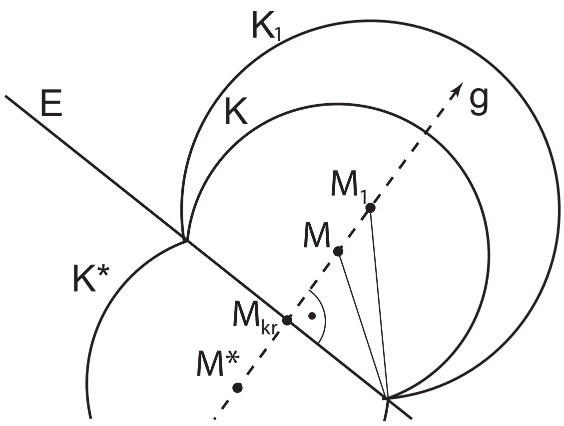
Die allgemeine Form einer Kugelgleichung in Vektorform ist folgende:
$\left[\overrightarrow{x} - \overrightarrow{m}\right]^2 = r^2$ mit:

- $\overrightarrow{m}$: Ortsvektor des Mittelpunkts M der Kugel.
- $\overrightarrow{r}$: Radius der Kugel.

Hier gilt es also, einen von t abhängigen Vektor für die Mittelpunkte M_t und einen von t abhängigen Radius r_t der verschiedenen Scharkugeln zu bestimmen. Vergrößert oder verkleinert man nun die obere Kugel des Hüpfballs, so liegen die Mittelpunkte der neu entstehenden Kugeln weiterhin auf der Geraden g (siehe rechts). Gerade g dargestellt als Vektor dient also als der Vektor, welcher in Abhängigkeit von t, die Lage der Mittelpunkte M_t der Kugelschar K_t beschreibt.



Im Aufgabenteil b war es deine Aufgabe den Flächeninhalt des Schnittkreises kr zu berechnen. Dazu hast du den Radius r_S des Schnittkreises benötigt. Diesen Radius r_S hast du über den Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck, in welchem auch der Radius R der Kugel K und die Strecke $\overrightarrow{MM_{kr}}$ lag, berechnet. Da nun aber die Kugelschar K_t betrachtet wird, ist Lage der Mittelpunkte mit M_t und der Radius r_t variabel. Stellst du nun denselben Satz des Pythagoras wie im Aufgabenteil b auf, so sieht dieser wie folgt aus:



$\overline{M_{kr}M_t}^2 + r_{kr}^2 = r_t^2$ mit r_t unbekannt.