Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Graph sei G.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, Polstellen sowie auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an. (21BE)

Ermitteln Sie vom Graphen G die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse sowie Art und Lage der lokalen Extrempunkte.

Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

Begründen und beschreiben Sie mithilfe einer Skizze, wie sich der Graph der Funktion h mit

$$y = h(x) = \frac{-2(1-x)^2}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

aus dem Graphen G entwickeln lässt.

b) Die Tangente an den Graphen G im Schnittpunkt mit der y-Achse stimmt im Intervall $-0,4 \leq x \leq 0,4$ mit dem Graphen G näherungsweise überein. Daher kann man in diesem Intervall die Funktion f durch eine die Tangente beschreibende lineare Funktion ersetzen. (4BE)

Berechnen Sie die Abweichungen der Funktionswerte an den Intervallenden, die bei Verwendung der linearen Funktion auftreten.

c) Weisen Sie nach, dass die Funktionen F_a mit $y = F_a(x) = a[x - \ln(x^2+1)]$ Stammfunktionen der Funktionen f_a mit (5BE)

$$y = f_a(x) = a\frac{(x-1)^2}{x^2+1}, \quad x,\ a \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0 \text{ sind.}$$

Die Graphen der Funktionen f_a und die Koordinatenachsen schließen Flächen vollständig ein.

Berechnen Sie den Wert für a so, dass der Inhalt einer solchen Fläche die Maßzahl 1 hat.