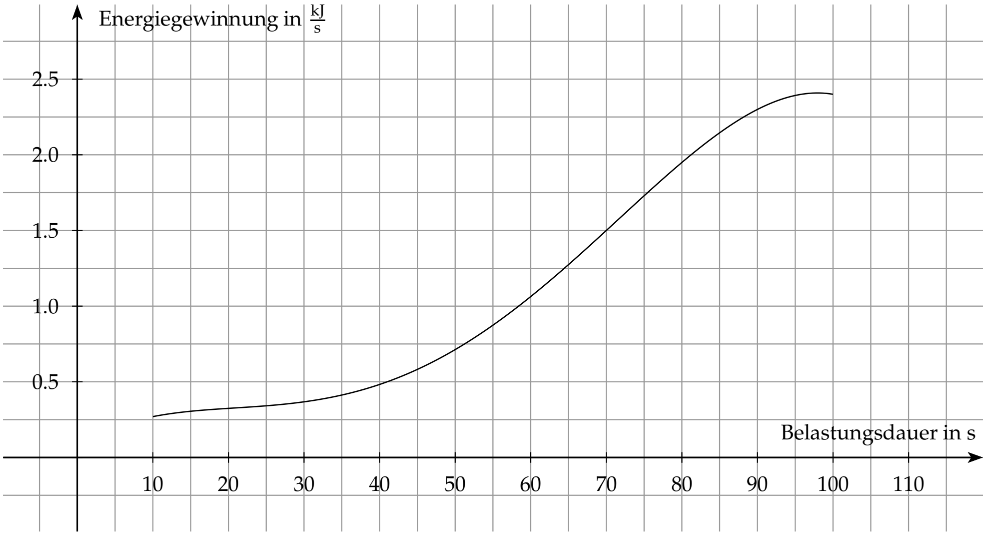
1.1 **▶ Bestimmen einer Funktion, die näherungsweise das Schaubild beschreibt** (6P)

Gegeben ist ein Schaubild, welches die aerobe Energiegewinnung in Kilojoule pro Sekunde zwischen der 10. und der 100. Sekunde der Läuferin Lena beschreibt.



Deine Aufgabe ist es, eine Funktion f zu bestimmen, die dieses Schaubild näherungsweise beschreibt.

Eine Funktionsgleichung der Funktion f kannst du mit Hilfe der **Regression** bestimmen. Überlege zunächst, welchen Grad die Funktion f mindestens haben muss, damit sie den Verlauf des gegebenen Schaubildes näherungsweise beschreibt.

Gib anschließend mehrere Punkte an, die auf dem Schaubild liegen. Mittels GTR kannst du dann die Funktion f modellieren.

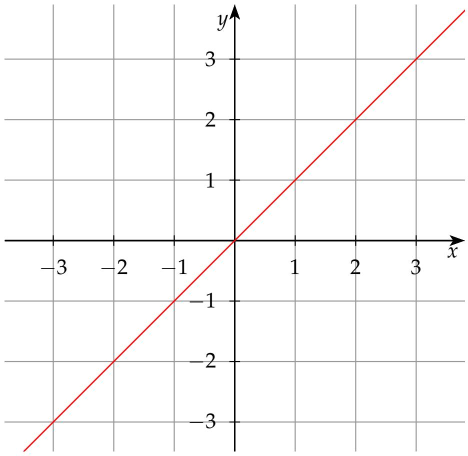
1. Schritt: Grad der Funktion f festlegen

Um die Funktion f aufstellen zu können, musst du zunächst entscheiden, welchen Grad die Funktion f mindestens haben soll, damit sie möglichst genau das Schaubild repräsentiert.

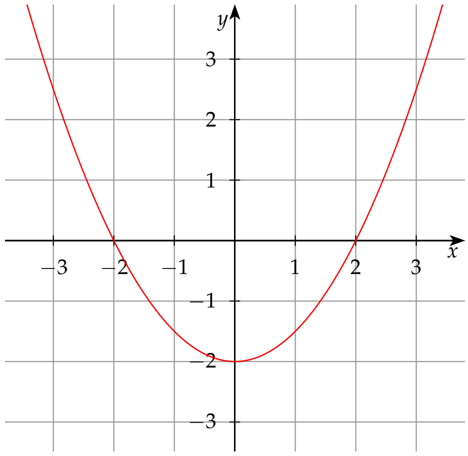
Dabei kannst du folgende Aussagen treffen:

- Eine ganzrationale Funktion vom Grad 1 ist eine Gerade. Das Schaubild weist aber Kurven auf und damit ist dieser Grad nicht geeignet.
- Eine ganzrationale Funktion vom Grad 2 ist eine Parabel und ebenfalls nicht geeignet, da diese für sehr große x-Werte stark ansteigt, wohingegen die Steigung des Schaubildes für größere Werte stark abfällt.
- Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat einen ähnlichen Verlauf wie im Schaubild zu sehen ist. Das heißt, diese eignet sich für die Regression.
- Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat ebenfalls einen ähnlichen Verlauf. Damit eignet sich ebenfalls eine Funktion 4. Grades.

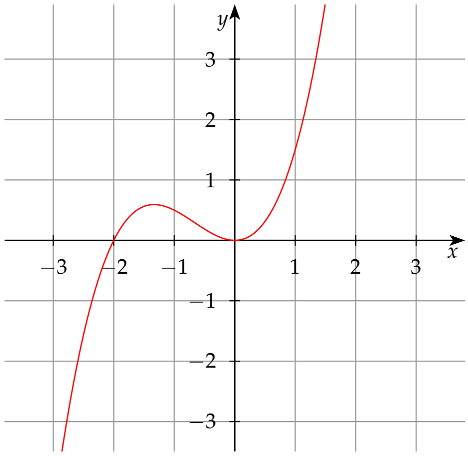
Funktion 1. Grades:



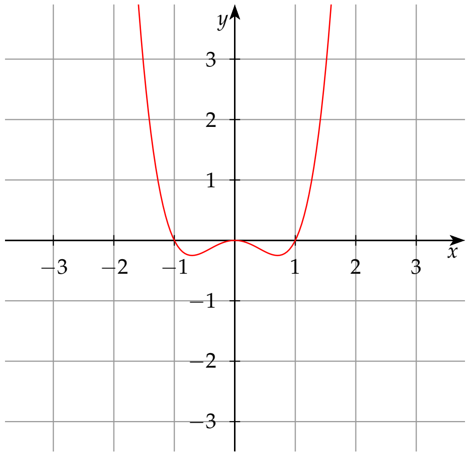
Funktion 2. Grades:



Funktion 3. Grades:



Funktion 4. Grades:



Du kannst erkennen, dass Funktionen vom Grad 3 als auch vom Grad 4 möglich wären. Wir entscheiden uns hierbei aber für eine Funktion 4. Grades, da diese den Verlauf genauer beschreiben kann, da diese sich aufgrund der höheren Anzahl an Parameter besser an den Verlauf anpassen lässt.

Das heißt, wir verwenden einen Funktionsterm $f(x)$ der folgenden Form:

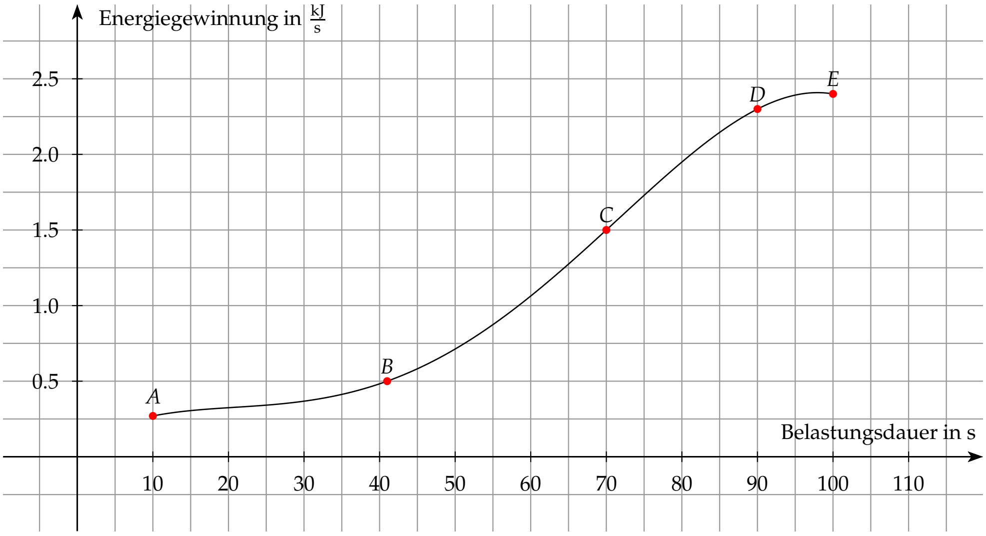
$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e.$$

2. Schritt: Punkte, die auf dem Schaubild liegen, angeben

Um die Parameter a, b, c, d und e bestimmen zu können, kannst du Punkte auf dem Schaubild suchen und in den Funktionsterm $f(x)$ einsetzen.

Wieviele Punkte benötigst du hier zur Bestimmung der Parameter?
Da wir eine Funktion 4. Grades gewählt haben, haben wir 5 Parameter, wie du oben nachzählen kannst. Für 5 Parameter benötigen wir fünf Punkte, damit alle Parameter eindeutig bestimmt werden können. Da fünf Parameter zu bestimmen sind, benötigst du fünf Bedingungen an f.
Das heißt, die Anzahl der notwendigen Punkte entspricht der Anzahl der zu bestimmenden Parameter.

Gib also 5 verschiedene Punkte an, die auf dem gegebenen Schaubild liegen:



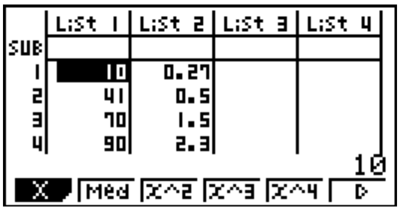
Wir wählen folgende Punkte:

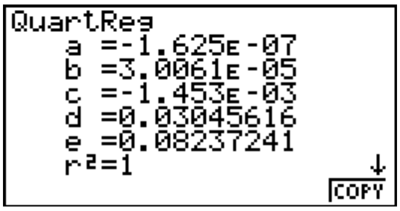
- $A(10 \mid 0,27)$
- $B(41 \mid 0,5)$
- $C(70 \mid 1,5)$
- $D(90 \mid 2,3)$
- $E(100 \mid 2,4)$

3. Schritt: Funktionsgleichung bestimmen

Da du nun alle notwendigen Angaben für die Bestimmung des Funktionsterms von f ermittelt hast, kannst du den Funktionsterm $f(x)$ mit Hilfe des `STAT`-Menüs des GTR bestimmen. Lege dort Listen mit den x- und y-Koordinaten an.
Du siehst eine Tabelle mit mehreren Spalten. Trage in die Spalte `L1` die x-Koordinaten und in die Spalte `L2` die entsprechenden y-Koordinate ein (linke Abbildung). Wähle unter $\boxed{\texttt{CALC} \rightarrow \texttt{REG} \rightarrow x^4}$ das Regressionsmodell einer Funktion 4. Grades aus.

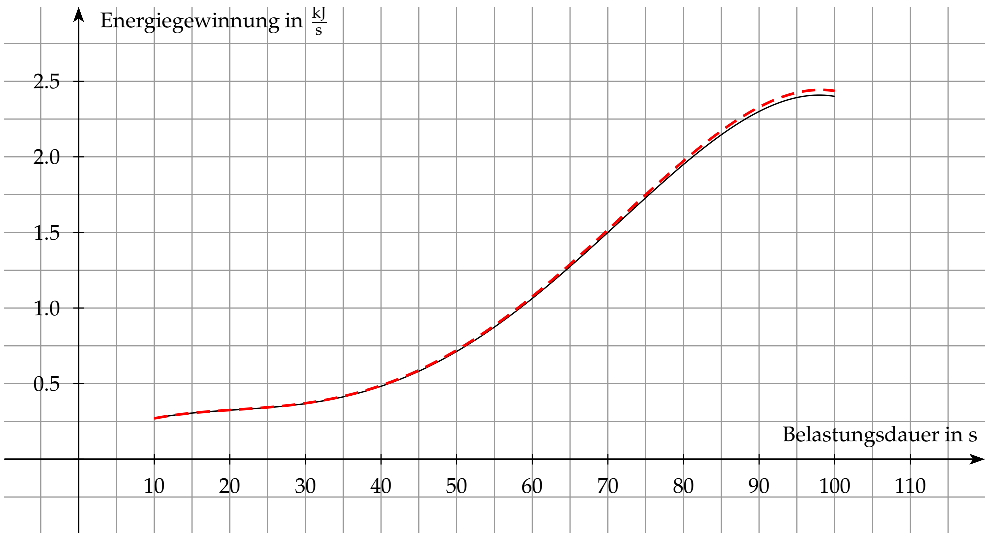
Danach liefert dir der GTR die gesuchten Parameter der Funktionsgleichung von f mit:
$a = -1,625 \cdot 10^{-7}$, $b = 3,006 \cdot 10^{-5}$, $c = -0,001453$, $d = 0,0304562$, $e = 0,0823724$.





Die Funktionsgleichung von f, die das Schaubild im Intervall $[10; 100]$ approximiert, lautet:

$$f(x) = -1,625 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 3,006 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0,001453 \cdot x^2 + 0,0304562 \cdot x + 0,0823724.$$



Die Abbildung zeigt das zu approximierende Schaubild in schwarz und die mittels Regression bestimmte Funktion f in rot.

▸ Prüfen, ob das Schaubild der Funktion f ständig wächst

Betrachte die Funktion f und den dazu ermittelten Funktionsterm mit:

$$f(x) = -1,625 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 3,006 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0,001453 \cdot x^2 + 0,0304562 \cdot x + 0,0823724.$$

Die Aufgabenstellung verlangt zusätzlich noch, die aufgestellte Funktion f auf **strenge Monotonie** im Intervall $[10; 100]$ zu untersuchen.

Eine Funktion f ist **streng monoton wachsend**, wenn für ihre erste Ableitung $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ gilt.

Bilde also die erste Ableitung von f und überprüfe, ob $f'(x) > 0$ für $x \in [10; 100]$ gilt.

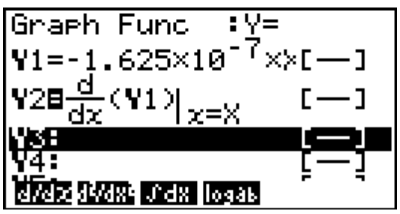
1. Schritt: Erste Ableitung der Funktion f bilden

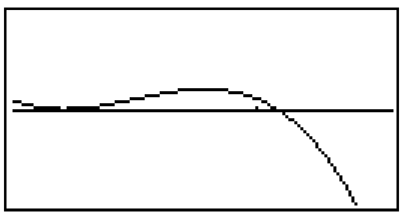
Die erste Ableitung der Funktion f kannst du mittels GTR bestimmen.

Gib dazu den Funktionsterm der Funktion f im `GRAPH`-Menü ein und wähle unter `OPTN → CALC → d/dx` den Befehl für das Bilden der ersten Ableitung aus. Gib in die Klammer `Y1` für den Funktionsterm von f ein. Wähle dazu das `Y`, das dir nach `EXIT → EXIT` in der Leiste angezeigt wird.

Lass die Ableitungsfunktion mittels `EXE` zeichnen.

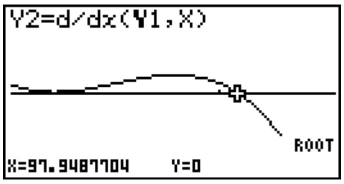
Die rechte Abbildung zeigt das Schaubild der ersten Ableitungsfunktion von f.





Da du nun zeigen sollst, dass die Funktion f im Intervall $[10;100]$ streng monoton wachsend ist, kannst du überprüfen, ob die erste Ableitungsfunktion echt größer Null ist.
Du kannst anhand der Abbildung erkennen, dass für die Funktion f' auf jeden Fall $f'(x) \geq 0$ gilt. Das heißt, dass es genügt zu überprüfen, ob die erste Ableitungsfunktion von f keine Nullstellen besitzt, also ob f' **echt größer Null** ist.

Anhand der Abbildung kannst du erkennen, dass diese die x-Achse schneidet. Untersuche, ob sich diese Schnittstelle innerhalb des Intervalls $[10;100]$ befindet. Ist das der Fall, so wird die Steigung kleiner gleich Null und die Funktion f ist im Intervall $[10;100]$ nicht streng monoton wachsend.



Wähle dazu im `GRAPH`-Menü unter $\boxed{\texttt{G-Solv} \rightarrow \texttt{ROOT}}$ die Option zur Bestimmung von Nullstellen aus. Der GTR gibt an, dass an $x = 97{,}983$ eine Nullstelle vorliegt.

Damit wird die Steigung der Funktion f im Intervall $[10;100]$ gleich Null und die Funktion f ist **nicht streng monoton wachsend**

1.2 ▶ **Ermitteln des prozentualen Anteils** (3P)

Es werden 275 Kilojoule zwischen der 10. und 100. Sekunde bereitgestellt. Ermittle den prozentualen Anteil, der auf die aerobe Energie entfällt.

Das heißt, dass du zunächst berechnen sollst wie viel aerobe Energie insgesamt zwischen der 10. und der 100. Sekunde bereitgestellt wird. Das kannst du ermitteln, indem du

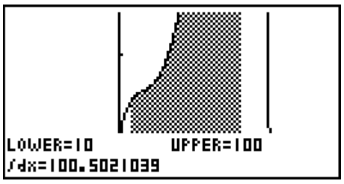
$$\int_{10}^{100} f(x)\mathrm{d}x$$

berechnest, denn Integration über die aufgestellte Funktion f im Intervall $[10;100]$ entspricht dem Gesamtbetrag der aeroben Energie zwischen der 10. und 100. Sekunde. Dieser Zusammenhang gilt, da die Funktion f die Änderungsrate angibt.
Der prozentuale Anteil der aeroben Energie entspricht dann dem Gesamtbetrag dividiert durch die Anzahl der bereitgestellten Kilojoule.

1. Schritt: Integral über der Funktion f im Intervall $[10;100]$ berechnen

Das Integral über der Funktion f im Intervall $[10;100]$ kannst du mit Hilfe des GTR berechnen.
Definiere dazu die Funktion f mit dem Funktionsterm
$f(x) = -1{,}625 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 3{,}006 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}001453 \cdot x^2 + 0{,}0304562 \cdot x + 0{,}0823724.$

im GTR und lass diese im Graph-Modus anzeigen.
Wähle anschließend unter $\boxed{\texttt{F5(G-Solv)} \rightarrow \texttt{F3}}$ den Befehl zur Berechnung eines Integrals über einer Funktion f aus.
Gib die Integrationsgrenzen $x_1 = 10$ und $x_2 = 100$ an und bestätige jeweils mit `EXE`.



Das liefert dir, dass ein Gesamtbetrag von 100,5 kJ aerobe Energie zwischen der 10. und der 100. Sekunde hergestellt werden.

Da in dieser Zeit 275 kJ bereitgestellt werden, kannst du den prozentualen Anteil wie folgt berechnen:

$\dfrac{100,5}{275} = 0,365 = 36,5\,\%$

Der prozentuale Anteil der aeroben Energie beträgt 36,5 %.

1.3 **▶ Bestimmen der Parameter a und b** (6P)

Die Funktion $g(t) = a \cdot t \cdot e^{b \cdot t}$ stellt die anaerobe Energiegewinnung in $\frac{kJ}{s}$ zwischen der 10. und der 100. Sekunde dar. Sei dabei t die Zeit in Sekunden.

Laut Aufgabentext erreicht die anaerobe Energiegewinnung nach 26 Sekunden mit $2,5\frac{kJ}{s}$ ihren Höchstwert.

Deine Aufgabe ist es, die Parameter a und b so zu bestimmen, dass die oben genannten Angaben erfüllt werden.

Aus dem Aufgabentext weißt du, dass die anaerobe Energiegewinnung im Punkt $H(26 \mid 2,5)$ ihren Höchstwert erreicht. Verwende diese Aussage, um Parameterwerte für a und b zu ermitteln.

Dabei kannst du folgendermaßen vorgehen:

- Setze die Koordinaten des gegebenen Punktes in den Term der Funktion g ein, um eine erste Gleichung zu erhalten.
- Bilde die erste Ableitungsfunktion von g. Da du weißt, dass die Funktion g ihr Maximum an der Stelle $t = 26$ erreicht, muss die erste Ableitung von g an dieser Stelle gleich Null sein. Daraus erhältst du die zweite Gleichung.

Aus diesen Gleichungen erhältst du angepasste Werte für a und b.

1. Schritt: Bestimmen der ersten Ableitung g'

Leite die Funktion g mittels Ketten- und Produktregel wie folgt ab:

$$\begin{aligned} g(t) &= a \cdot t \cdot e^{b \cdot t} \\ g'(t) &= a \cdot 1 \cdot e^{b \cdot t} + a \cdot b \cdot t \cdot e^{b \cdot t} \\ &= a \cdot e^{b \cdot t}(1 + b \cdot t) \end{aligned}$$

2. Schritt: Einsetzen der Angaben

Aus dem Aufgabentext weißt du, dass der Punkt $P(26 \mid 2,5)$ auf dem Schaubild der Funktion g liegt. Weiterhin weißt du auch, dass dieser Punkt dem Hochpunkt entspricht. Das heißt, dass an der Stelle $t = 26$ die Ableitungsfunktion g' gleich Null ist.

Das liefert dir folgende Gleichungen:

- $g(26) = 2,5 \Rightarrow 2,5 = 26 \cdot a \cdot e^{26 \cdot b}$
- $g'(26) = 0 \Rightarrow 0 = a \cdot e^{b \cdot 26}(1 + b \cdot 26)$

Betrachte die zweite Gleichung mit $0 = a \cdot e^{b \cdot 26}(1 + b \cdot 26)$. Mit dem **Satz vom Nullprodukt** folgt, dass einer der Faktoren gleich Null sein muss. Also:

- $0 = a \cdot e^{b \cdot 26}$ oder
- $0 = 1 + b \cdot 26$

Aus der ersten Gleichung würde folgen, dass $a = 0$ gilt, da der Term e^x für keinen Wert gleich Null werden kann. Da aber für $a = 0$ auch $g(t) = 0$ folgen würde und damit keine sinnvolle Funktion modelliert werden würde, die die anaerobe Energiegewinnung beschreibt, betrachten wir den Term $0 = 1 + b \cdot 26$:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + b \cdot 26 && \mid -1 \\ -1 &= b \cdot 26 && \mid :26 \\ -\tfrac{1}{26} &= b \end{aligned}$$

Das liefert dir einen Parameterwert für b mit $\boldsymbol{b = -\frac{1}{26}}$.
Einsetzen von $b = -\frac{1}{26}$ in die Gleichung $0 = a \cdot \mathrm{e}^{b \cdot 26} \cdot (1 + b \cdot 26)$ liefert dir den gesuchten Parameterwert für a:

$$\begin{aligned} 2{,}5 &= 26 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{26 \cdot (-\frac{1}{26})} \\ 2{,}5 &= 26 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-1} && \mid :26 \\ \tfrac{5}{52} &= a \cdot \mathrm{e}^{-1} && \mid \cdot \mathrm{e} \\ \tfrac{5}{52} \cdot \mathrm{e} &= a \end{aligned}$$

Für den Parameterwert a gilt $\boldsymbol{a = \frac{5}{52} \cdot \mathrm{e} \approx 0{,}2614}$.

Damit kannst du den Term der Funktion g vollständig angeben mit:

$g(t) = 0{,}2614 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{26} \cdot t}$.

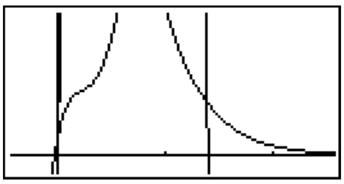
▶ Ermitteln des Zeitpunktes, an dem der aerobe Anteil überwiegt

Im Abschnitt zuvor hast du einen Funktionsterm für die Funktion g ermittelt, die die anaerobe Energiegewinnung zwischen der 10. und 100. Sekunde modelliert. Der Funktionsterm lautet wie folgt:

$$\boldsymbol{g(t) = 0{,}2614 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{26} \cdot t}}$$

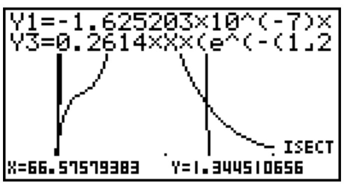
Bestimme den Zeitpunkt t^*, ab dem der Anteil der aeroben Energiegewinnung höher ist als der der anaeroben Energiegewinnung.

Verwende dazu den GTR. Definiere die Funktionen f und g und lass beide zeichnen. Bestimme schließlich den Schnittpunkt der beiden Schaubilder, um den Zeitpunkt t^* zu ermitteln.
Eingabe im GTR liefert dir die Schaubilder der Funktionen f und g.



Du kannst erkennen, dass ab dem Schnittpunkt der Schaubilder die Funktionswerte von f oberhalb der Funktionswerte von g liegen. Folglich entspricht diese Schnittstelle x_t dem Zeitpunkt t^*, ab dem der Anteil der aeroben Energiegewinnung höher ist als der der anaeroben Energiegewinnung.

Bestimme den Schnittpunkt der Schaubilder von f und g, indem du im Graph-Modus unter `F5(G-Solv) → F5: ISCT` die entsprechende Option auswählst.



Der GTR liefert dir die gesuchte Schnittstelle $\boldsymbol{x_t = t^* = 66{,}576}$.
Für $t > 66{,}576$ ist der Anteil der aeroben Energiegewinnung größer als der Anteil der anaeroben Energiegewinnung.