1.2 ▶ Mindestgrad der Funktion bestimmen (2P)

Betrachte den oberen Rand des Pilzes und achte dabei vor allem auf Eigenschaften wie

- Hochpunkte
- Tiefpunkte
- Wendepunkte

All diese Eigenschaften geben Aufschluss darüber, welche und wie viele Bedingungen die Funktion erfüllen muss und welchen Grad sie dann haben muss.

Du erkennst z.B., dass der Graph der Funktion bei $x \approx 1$ und $x \approx 6$ einen Hochpunkt besitzen muss und bei $x \approx 3$ einen Tiefpunkt. Dies sind drei Extrempunkte.

Die Extremstellen sind die Nullstellen der ersten Ableitung. Diese muss also mindestens Grad 3 sein, damit drei Extremstellen möglich sind. Entsprechend kannst du sagen:

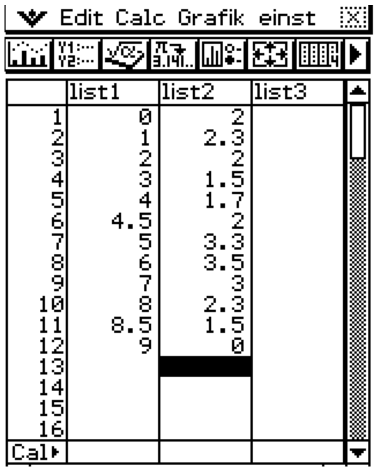
Die Funktion selbst muss mindestens den Grad 4 haben.

1.2 ▶ Mögliche Näherungsfunktion bestimmen (9P)

In der Aufgabenstellung sind dir 12 Punkte gegeben, durch die der Graph der Funktion verlaufen soll. Du kannst eine mögliche Funktionsgleichung also durch **Regression** bestimmen. Nutze dazu dein CAS.

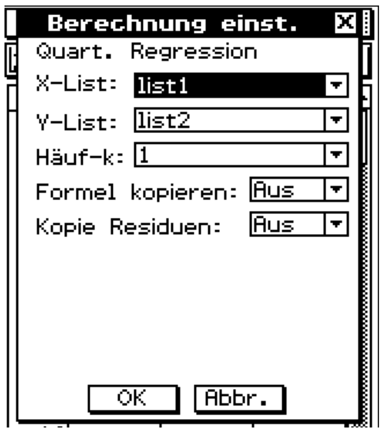
Öffne das `Statistik`-Menü deines CAS und gib die Wertetabelle aus der Aufgabenstellung ein. Stelle die x-Werte und die y-Werte je in einer Spalte dar.

Gib den beiden Spalten einen Namen; wir haben sie `list1` und `list2` genannt.

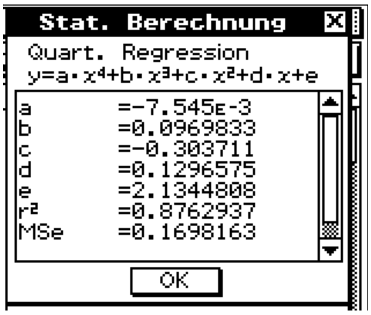


Führe nun mit $\boxed{\texttt{Calc} \rightarrow \texttt{Quart. Regression}}$ eine Regression durch, um eine Funktion vierten Grades zu bestimmen. Wähle als x-Liste und y-Liste jeweils `list1` und `list2`.

Die restlichen Einstellungen kannst du unverändert lassen.



Bestätigen mit `OK` startet die Regression. Das CAS liefert dir die Werte
$a = -0,0075$, $b = 0,097$, $c = -0,3037$, $d = 0,1297$ und $e = 2,1345$

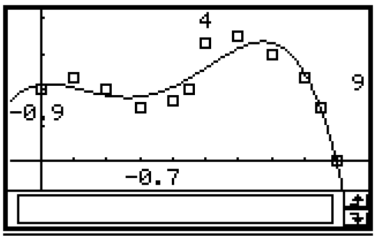


Damit erhältst du die Näherungsfunktion f mit
$f(x) = -0,0075x^4 + 0,097x^3 - 0,3037x^2 + 0,1297x + 2,1345.$

▶ Güte der Näherungsfunktion beschreiben

Um die Güte der Näherungsfunktion zu beschreiben, kannst du ihren Graphen zunächst zeichnen und mit den 10 Punkten vergleichen und mit dem tatsächlichen Verlauf des oberen Rand des Pilzes vergleichen.

Hast du die Regression wie oben durchgeführt, so kannst du mit erneutem betätigen der `OK`-Taste dir den Graphen der Funktion anzeigen lassen.



Ein Vergleich zeigt: Gerade bei den Extrempunkten hat der Graph eine recht große Abweichung vom tatsächlichen Verlauf des Pilzes.
Zur Optimierung des Ergebnisses kann der **Grad** der Funktion erhöht werden; es kann z.B. eine Funktion 5. Grades verwendet werden. So gibt es mehr Parameter im Funktionsterm und der Graph kann sich näher an die Punkte selbst legen.

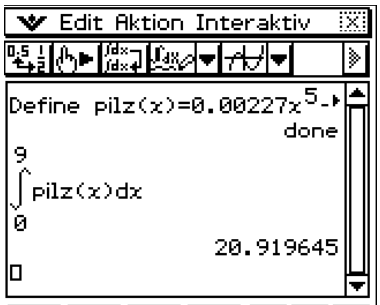
2.1 **▶ Gesamtfläche des verarbeiteten Papiers berechnen** (7P)

Lies die Aufgabenstellung nochmals genau durch:

- Der Pilz besteht aus 25 Papierlamellen, die je ein Längsschnitt des Pilzes sind.
- Wenn A der Inhalt des Längsschnitts ist, dann ist $25 \cdot A$ die Fläche des verarbeiteten Papiers.
- Berechne also den Inhalt des Längsschnitts.

Berechne ein **Integral**, um den Flächeninhalt zu ermitteln. Aufgrund der Achsensymmetrie zur x-Achse der Figur kannst du dich auf den Teil oberhalb der x-Achse beschränken.

Definiere die Funktion *pilz* in deinem CAS. Ihr Graph beschreibt den oberen Rand des Pilzes im Bereich $[0\,;\,9]$. Die Grenzen der Fläche sind also $x = 0$ und $x = 9$.
Den Befehl für `Integrieren` findest du unter $\boxed{\texttt{Keyboard} \to \texttt{2D} \to \texttt{CALC}}$. Berechne das Integral im Bereich $x = 0$ bis $x = 9$.



Mit dem CAS ergibt sich $A_o \approx 20,92$.
Der Längsschnitt hat also eine Fläche von $A = 2 \cdot 20,92 = 41,84$. Für die Fläche A_P an verwendetem Papier gilt dann:

$A_P = 25 \cdot 41,84 = 1.046.$

Ein Einheit im Koordinatensystem entspricht laut Aufgabenstellung 1 cm. Also kannst du sagen:

Für den Pilz werden 1.046 cm^2 Papier benötigt.

2.2 ► **Plausible Argumentation entwickeln und Behauptung beweisen** (8P)

Berechne zunächst den Flächeninhalt des Bogens, den Marie gekauft hat. Überlege, was es zu beachten gilt:

- Beim Ausschneiden der Pilzlamellen entsteht **Verschnitt**. Überlege also, wie man die Figuren am günstigsten auf dem Bogen anordnen kann, um Platz zu sparen und zeige, dass dann genügend Papier vorhanden ist.

- Berechne, ob mit diesem Verschnitt das Papier noch genügt.

1. Schritt: Flächeninhalt des Papierbogens berechnen

Der Papierbogen hat die Maße 30 cm mal 45 cm. Er hat die Form eines Rechtecks. Für den Inhalt A_B gilt also:

$A_B = 30\,\text{cm} \cdot 45\,\text{cm} = 1.350\,\text{cm}^2.$

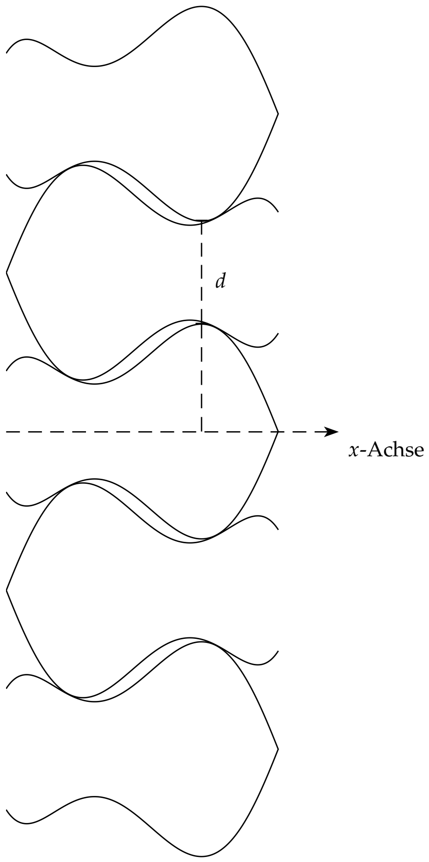
Also ist der Bogen an sich **größer** als die Fläche, die für einen Pilz benötigt wird.

2. Schritt: Verschnitt berücksichtigen

Wenn Marie die Pilzformen ausschneidet, entsteht Verschnitt. Es macht also Sinn, die Figuren so auf dem Bogen anzuordnen, dass möglichst wenig Verschnitt entsteht.

Die Lamellenfigur ist 9 cm lang, Maries Bogen ist 45 cm lang. Sie kann also 5 Spalten von Lamellenfiguren darauf zeichnen.

Damit insgesamt 25 Lamellenfiguren auf den Bogen passen, müssen in einer Spalte wiederum fünf Figuren untereinanderstehen.



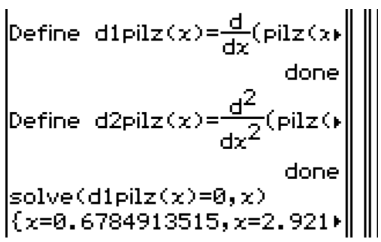
Links ist eine mögliche Anordnung der Lamellenfiguren gezeigt, die möglichst platzsparend ist. Die fünf Lamellenfiguren passen in eine Spalte, wenn sie insgesamt nicht höher als 30 cm sind.
Überlege, wie du die Gesamthöhe der fünf Figuren berechnen kannst:

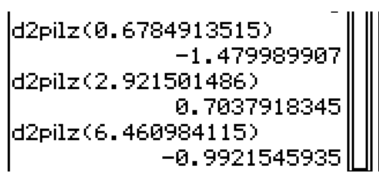
- Wenn du die y-Koordinate des Hochpunktes kennst, dann kennst du den Abstand von der x-Achse zum Hochpunkt, also einen wichtigen Teil der Gesamthöhe.
- Berechne also das Maximum x_M von $pilz$.
- Anschließend kannst du auch den Abstand d (s. Abbildung) berechnen.
- Für die Gesamthöhe h gilt dann: $h = 6 \cdot y_M + 2 \cdot d$.

Extrempunkte berechnen Eine Extremstelle x_E von $pilz$ liegt vor, wenn gilt:

- notwendiges Kriterium $pilz'(x_E) = 0$,
- hinreichendes Kriterium: $pilz''(x_E) < 0$.

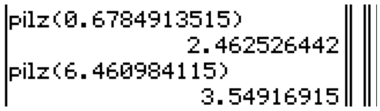
Bestimme also zunächst die ersten beiden Ableitungen von $pilz$. Wir speichern die erste Ableitung als d1pilz(x) und die zweite als d2pilz(x). Den Befehl für „Ableiten" findest du dabei unter `Keyboard → 2D → CALC`. Löse dann die Gleichung $pilz'(x) = 0$, um potentielle Extremstellen von $pilz$ zu finden. Ermittle dann über das hinreichende Krterium deren Art. Suche zuletzt das Maximum mit dem größten Funktionswert im Intervall $[0\,;9]$.





Da die Funktion $pilz$ nur im Intervall $[0\,;9]$ betrachtet wird, kannst du die letzte Lösung vernachlässigen. Mit dem hinreichenden Kriterium erfährst du: $pilz$ besitzt Maxima bei $x_1 \approx 0{,}6785$ und bei $x_2 \approx 6{,}461$.

Berechne die zugehörigen y-Koordinaten:



Damit weißt du: Der obere Teil des Längsschnitts hat die höchste Stelle bei $x \approx 6,461$ und ist dort etwa 3,55 LE hoch.

Damit kennst du $y_M \approx 3,5$.

Abstand d berechnen

Die Lamellenfiguren, die mit dem Hut nach rechts zeigen, sind **gespiegelt**. Wo bei den „normalen“ Lamellenfiguren der Funktionswert zu $x = 9$ ist, dort ist bei den gespiegelten Lamellenfiguren der Funktionswert $x = 0$, sie werden also gleichsam von rechts nach links gezeichnet.

In der „normalen“ Lamellenfigur liegt der Abstand d an der Stelle $x \approx 6,461$. Bei den gespiegelten liegt an der Stelle

$x_d = 9 - 6,461 = 2,539$

Für den Abstand d gilt dann also:

$d = 2 \cdot pilz(2,539)$

Mit dem CAS ergibt sich: $d \approx 2 \cdot 1,619 = 3,238$.

Für die gesamte Höhe der fünf Lamellenfiguren gilt dann:

$$\begin{aligned} h &= 6 \cdot 3,5 + 2 \cdot 3,238 \\ &= 27,476 \end{aligned}$$

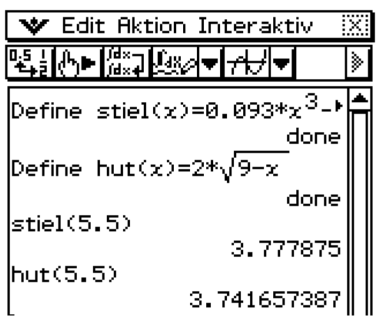
Die fünf Lamellenfiguren haben eine Gesamthöhe von etwa 27,48 cm. Dies ist kleiner als 30 cm, also können fünf Figuren in eine Spalte gelegt werden.

Da insgesamt 5 Spalten auf den Bogen passen, hat Marie mit ihrer Behauptung Recht.

3.1 ▶ **Parameterwert nachweisen** (6P)

a ist die Stelle, an der die Graphen der beiden Funktionen *stiel* und *hut* sich treffen; hier liegt also ein **Schnittpunkt** der beiden Graphen von. Zeige, dass die beiden Funkionen bei $a \approx 5,5$ (nahezu) denselben Funktionswert besitzen:

Mit dem CAS ergibt sich:
$stiel(5,5) = 3,77788$
$hut(5,5) = 3,74166$
Die beiden Werte stimmen hinreichend genau überein. Damit hast du plausibel gezeigt, dass $a \approx 5,5$ ist.



3.2 ▶ **Kunststoffmasse in g berechnen** (7P)

In der Aufgabenstellung ist dir die Dichte des Plastikmaterials gegeben. Berechne also das **Volumen** des Pilzes und multipliziere es mit der Dichte.

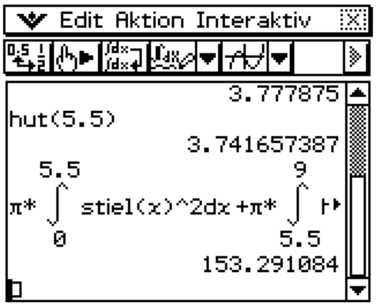
Beachte dabei:

- Der Pilz entsteht, wenn die Graphen von *stiel*, *hut* und *hohl* um die x-Achse rotieren.
- Für das Volumen eines Rotationskörpers um die x-Achse gilt die Formel: $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$
- Du kannst zunächst das Volumen des Pilzes berechnen, ohne den Hohlraum zu berücksichtigen. Subtrahiere anschließend das Volumen des Hohlraums.

1. Schritt: Volumen ohne Berücksichtigung des Hohlraums berechnen

Der Rotationskörper entsteht, wenn der Graph von *stiel* im Bereich $[0\,;\,5{,}5]$ um die x-Achse rotiert und der Graph von *hut* im Bereich $[5{,}5\,;\,9]$:

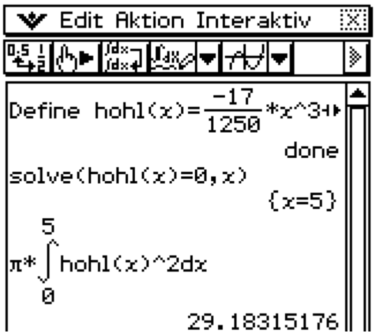
$V_O = \pi \cdot \int_0^{5,5} (stiel(x))^2 \,\mathrm{d}x + \pi \cdot \int_0^{5,5} (hut(x))^2 \,\mathrm{d}x$
Mit dem CAS ergibt sich $V_O = 153{,}291\,\mathrm{cm}^3$



2. Schritt: Volumen des Hohlraums berechnen

Der Hohlraum entsteht, wenn der Graph von *hohl* um die x-Achse rotiert. Die linke Grenze des Rotationskörpers ist mit $x = 0$ gegeben. Die rechte Grenze ist die **Nullstelle** x_0 von *hohl*. Berechne diese zunächst; setze dazu $hohl(x) = 0$.
Berechne dann mit $\pi \int_0^{x_0} (hohl(x))^2 \,\mathrm{d}x$ das Volumen des erzeugten Rotationskörpers.

Für das Volumen V_H des Rotationskörpers liefert das CAS dann
$V_H = \frac{2.601\pi\sqrt{5}}{280} \approx 29{,}18\,\mathrm{cm}^3$.



Für das Volumen V des Pilzes gilt schließlich:
$V = V_O - V_H = 153{,}291\,\mathrm{cm}^3 - 29{,}18\,\mathrm{cm}^3 = 124{,}11\,\mathrm{cm}^3$.

3. Schritt: Masse des Pilzes berechnen

Du weißt: $1\,\mathrm{cm}^3$ wiegt 1,18 g. Also gilt für die Masse m des Pilzes:
$m = 124{,}11 \cdot 1{,}18\,\mathrm{g} = 146{,}45\,\mathrm{g}$

Ein Pilz wiegt etwa 146,5 g.