a) **Nachweis, dass A, B, C und D in einer Ebene liegen** (4BE)

Für den Nachweis wird eine Ebenengleichung mithilfe der Punkte $A(2|-1|0)$, $B(4|3|0)$ und $C(0|5|-3)$ aufgestellt und danach eine Punktprobe mit den Punkt $D(-2|1|-3)$ durchgeführt. Erfüllen die Koordinaten von D die Gleichung, so liegen alle 4 Punkte in dieser Ebene.
Die Ebene E_{ABC} hat den Stützvektor $\overrightarrow{OA}$ und die beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$E_{ABC}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$E_{ABC}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4-2\\3-(-1)\\0-0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0-2\\5-(-1)\\-3-0\end{pmatrix}$$

$$E_{ABC}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Einsetzen von D in die Ebene E:

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Diese Parametergleichung entspricht dem LGS

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -2 = 2+2r-2s \\ \text{II} & 1 = -1+4r+6s \\ \text{III} & -3 = 0+0r-3s \\ \hline \text{I} & -4 = 2r-2s \\ \text{II} & 2 = 4r+6s \\ \text{III} & -3 = -3s \\ \hline \end{array}$$

Aus (III) folgt $s = 1$. Einsetzen in (I):

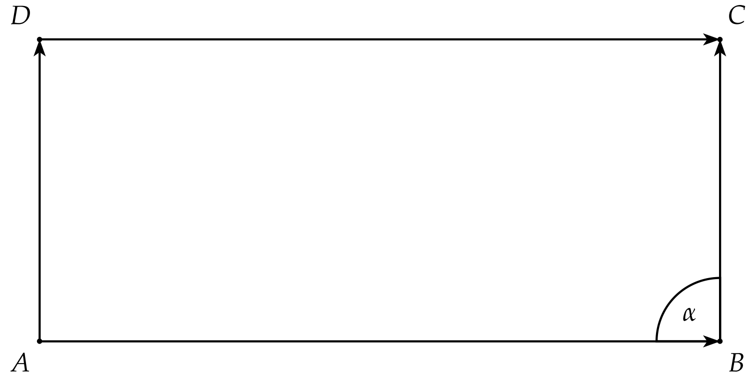
$$\begin{array}{ll} \text{I} & -2 = 2+2r-2\cdot 1 \\ & r = -1 \\ r, s \text{ in (II)} & 2 = 4\cdot(-1)+6\cdot 1 \\ & 2 = 2 \quad \text{(wahre Aussage)} \\ \hline \end{array}$$

Da die Koordinaten von D das LGS erfüllen, liegt D somit in der Ebene E_{ABC}. Damit ist gezeigt, dass alle 4 Punkte in einer Ebene liegen.

Nachweis, dass $ABCD$ ein Rechteck ist

Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck, wenn jeweils zwei Gegenseiten gleich lang und parallel zueinander sind.

Skizze:



Es muss nun also die Gültigkeit von (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, sowie dass (2) $\alpha = 90°$ ist, gezeigt werden. Wenn die Gültigkeit von (1) gezeigt ist, muss nur noch ein Innenwinkel nachgewiesen werden, da mit diesem dann auf die Größe der anderen drei Winkel von 90° geschlossen werden kann.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3-(-1) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{DC} &= \begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 5-1 \\ -3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \begin{pmatrix} -2-2 \\ 1-(-1) \\ -3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} 0-4 \\ 5-3 \\ -3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Damit ist die Bedingung (1) nachgewiesen.

Gilt für den Winkel $\sphericalangle CBA = \alpha = 90°$, so muss das Skalarprodukt der beiden anliegenden Seitenvektoren gleich Null sein:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -8 + 8 = 0$$

Damit ist die Bedingung (2) nachgewiesen.

Das Viereck $ABCD$ ist somit ein Rechteck.

b) **Nachweis, dass die Pyramide gerade ist** (7BE)

Wenn die Pyramide gerade ist, müssen alle Seitenkanten dieselbe Länge haben. Es muss also $\left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\overrightarrow{BS}\right| = \left|\overrightarrow{CS}\right| = \left|\overrightarrow{DS}\right|$ gelten.

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -5-2 \\ 5-(-1) \\ \frac{17}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ \frac{17}{2} \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{(-7)^2+6^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{629}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{629}$$

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -5-4 \\ 5-3 \\ \frac{17}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ \frac{17}{2} \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{BS}\right| = \sqrt{(-9)^2+2^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{629}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{629}$$

$$\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} -5-0 \\ 5-5 \\ \frac{17}{2}-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ \frac{23}{2} \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{CS}\right| = \sqrt{(-5)^2+0^2+\left(\frac{23}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{629}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{629}$$

$$\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} -5-(-2) \\ 5-1 \\ \frac{17}{2}-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ \frac{23}{2} \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{DS}\right| = \sqrt{(-3)^2+4^2+\left(\frac{23}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{629}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{629}$$

Es besitzen somit alle Seitenkanten dieselbe Länge – die Pyramide ist gerade.

Volumen der Pyramide

Für das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h gilt allgemein

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche ist ein Rechteck mit der Länge $\overline{AB}$ und der Breite $\overline{BC}$, daher gilt für G:

$$G = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|$$

Die Höhe h entspricht der Strecke vom Mittelpunkt M der Grundfläche und der Spitze S, da die Pyramide gerade ist. Es gilt daher

$$h = \overline{MS} = |\overrightarrow{MS}|$$

Den Koordinaten von M entsprechen jeweils die Mittelwerte zweier schräg gegenüberliegenden Eckpunkte, also entweder den Mittelwerten von $A(2|-1|0)$ und $C(0|5|-3)$ oder von $B(4|3|0)$ und $D(-2|1|-3)$. Dies ergibt die Koordinaten von M zu $M(1|2|-1,5)$. Für den Vektor $\overrightarrow{MS}$ gilt also:

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -5-1 \\ 5-2 \\ \frac{17}{2}-(-1,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{MS}| = \sqrt{(-6)^2+3^2+10^2} = \sqrt{145}$$

Für das Volumen folgt daraus

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{MS}|$

$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{145}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{145}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 290$

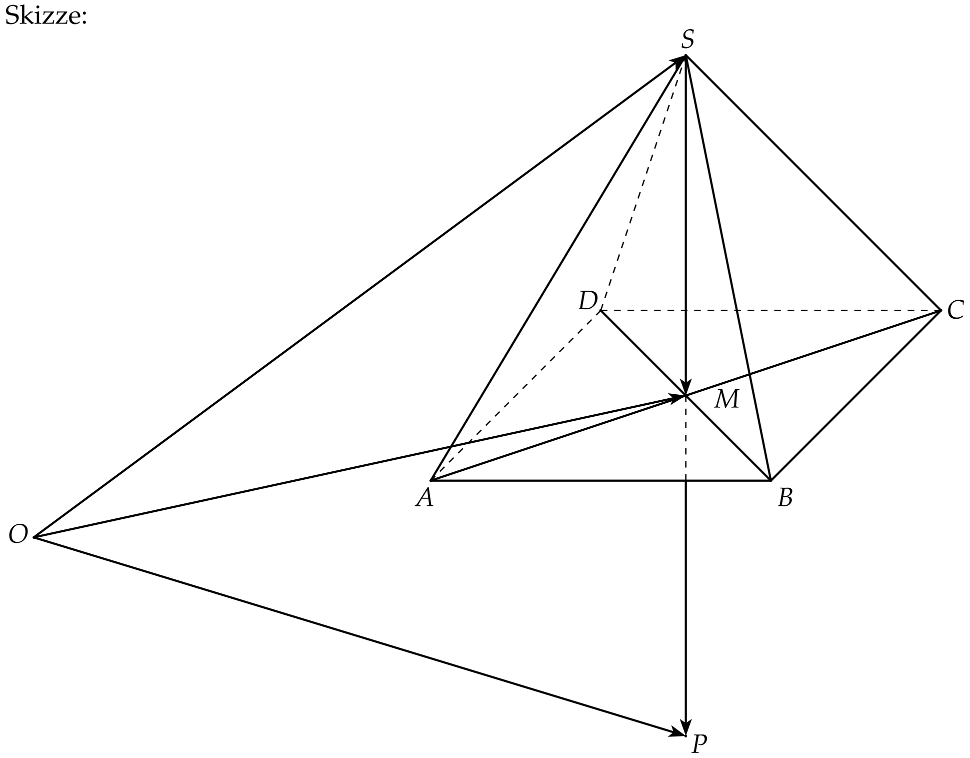
$V = 96\frac{2}{3}$

Die Pyramide hat ein Volumen von $96\frac{2}{3}$ VE.

Bestimmung der Koordinaten von Punkt P

Wenn P nicht identisch mit S sein kann, kann er nur der Spiegelpunkt von S an der Ebene E sein. Dann ist P die Spitze einer zweiten Pyramide mit ebenfalls der Grundfläche $ABCD$ und mit identischem Volumen.

Skizze:



Aus der Skizze ist ersichtlich, wie der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ von P mithilfe von Summen anderer Vektoren berechnet werden kann:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$, wobei $\overrightarrow{MP}$ dem Vektor $\overrightarrow{SM}$ entspricht, also

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{SM}$

Zweite Möglichkeit:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + 2 \cdot \overrightarrow{SM}$.

Mithilfe des Ortsvektors erhält man so die Koordinaten von P.

c) **Begründung, dass $A(2|-1)$ außerhalb des Kreises k liegt** (4BE)

Für den Kreis k gilt:

$$k\colon\; x^2+8x+y^2-16 = 0 \qquad |+32$$
$$\underbrace{x^2+8x+16}_{\text{1. bin. Formel}}+y^2 = 32$$
$$(x+4)^2+y^2 = 32$$

Dies entspricht nun der allgemeinen Kreisgleichung $(x-m_1)^2+(y-m_2)^2=r^2$ mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $M(m_1|m_2)$.
Der Kreis k besitzt somit den Radius $r=\sqrt{32}$ und den Mittelpunkt $M(-4|0)$.

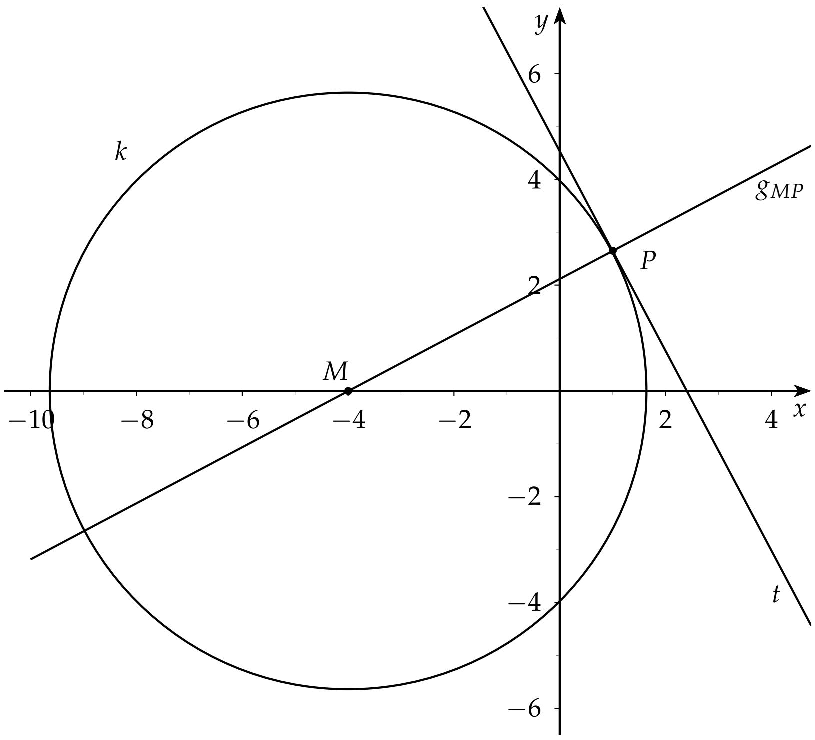
Für den Abstand d vom Punkt A und M gilt:

$$d = \sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}$$
$$d = \sqrt{(-4-2)^2+(0-(-1))^2}$$
$$d = \sqrt{37}$$

Nun ist erkennbar: Der Radius des Kreises ist kleiner als der Abstand des Mittelpunkts vom Punkt A. A liegt somit außerhalb des Kreises.

Nachweis der Tangentengleichung an k im Punkt $P(1|\sqrt{7})$

Skizze:



Für die Steigung m_g der Geraden g_{MP} durch den Mittelpunkt M und den Punkt P gilt:

$$m_g = \frac{y_P-y_M}{x_P-x_M} = \frac{\sqrt{7}-0}{1-(-4)} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

Die Tangente t ist orthogonal (senkrecht) zu g_{MP}. Für ihre Steigung m_t und der Steigung m_g von g_{MP} gilt somit

$$m_t \cdot m_g = -1$$
$$m_t = -\frac{1}{m_t}$$
$$m_t = -\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{5}} = -\frac{5}{\sqrt{7}}$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von P in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ wird die Geradengleichung von t aufgestellt:

Hinweis: Für Wurzeln gilt: $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}}$

$t\colon y = m_t \cdot x + c_t \qquad$ mit $P(1|\sqrt{7})$

$$\sqrt{7} = -\frac{5}{\sqrt{7}} \cdot 1 + c_t$$
$$c_t = \sqrt{7} + \frac{5}{\sqrt{7}}$$
$$c_t = \frac{7}{\sqrt{7}} \ \text{(s.o.)} \ + \frac{5}{\sqrt{7}}$$
$$c_t = \frac{12}{\sqrt{7}}$$

Daraus folgt für die Tangentengleichung $t\colon y = -\frac{5}{\sqrt{7}}x + \frac{12}{\sqrt{7}}$.

Damit ist die gegebene Tangentengleichung nachgewiesen.