a) Ermitteln Sie die Achsenschnittpunkte und die relativen Extrempunkte des Graphen der untenstehend dargestellten Funktion f mit (18VP)

$$f(x) = -\frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1.$$

Begründen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.

Benutzen Sie im Folgenden, dass einer der Hochpunkte $H(3\,|\,4)$ ist und dass die relativen Hochpunkte auch absolute Hochpunkte sind.

b) Die Gerade g mit $y = 4$ verläuft durch die Hochpunkte des Graphen von f. (11VP)
Zeichnen Sie die Gerade g in die untenstehende Abbildung ein.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der Geraden g eingeschlossen wird.

c) Leiten Sie die Gleichung der Parabel her, die ihren Scheitelpunkt im Ursprung hat und die durch die beiden Hochpunkte des Graphen von f verläuft. (13VP)
[Zur Kontrolle: $y = \frac{4}{9}x^2$]
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Parabel und der Geraden g aus Teilaufgabe b) eingeschlossen wird.
Zeigen Sie, dass sich der Inhalt A dieser Fläche auch mit der Formel $A = \frac{2}{3} \cdot s \cdot h$ berechnen lässt, wobei s der Abstand der beiden Schnittpunkte der Geraden g mit der Parabel und h der Abstand des Scheitelpunkts zur Geraden ist.

d) Zeigen Sie allgemein, dass die obige Formel zur Berechnen der eingeschlossenen Fläche auch dann gilt, wenn die Parabel zu $y = \frac{4}{9}x^2$ von einer beliebigen Parallenen zur x-Achse ($y = c,\ c > 0$) geschnitten wird. (8VP)

Funktionsgraph zu $f(x) = -\frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1$: