a) (1) ► **Bestimmen des Definitionsbereichs der Funktionen f_a** (7P)

Die Funktionenschar f_a ist eine Schar gebrochenrationaler Funktionen. Deine Aufgabe ist es hier, den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ dieser Funktionenschar zu bestimmen.

Da f_a eine gebrochenrationale Funktionenschar ist, untersuchst du diese beim Bestimmen des Definitionsbereichs $\mathbb{D}$ auf Definitionslücken. Betrachte dazu den Nenner des Funktionsterms von f_a.

(2) ► **Begründen, dass $x = a$ eine Polstelle ist**

Hier sollst du nun begründen, dass $x = a$ eine Polstelle der Funktionenschar f_a ist. Teile dazu zunächst den gebrochenrationalen Funktionsterm der Funktion f_a in Zähler- und Nennerfunktion auf:

Zählerfunktion: $Z_a(x) = (x - 3 \cdot a)^2$.
Nennerfunktion: $N_a(x) = x - a$.

(3) ► **Bestimmen der Gleichung der schrägen Asymptoten**

Deine Aufgabe ist es hier, die Gleichung der schrägen Asymptoten y der Scharfunktion f_a zu bestimmen. Da das Zählerpolynom mit $Z_a(x) = (x - 3 \cdot a)^2$ um einen Grad höher als das Nennerpolynom mit $N_a(x) = x - a$ ist, muss hier der Funktionsterm zunächst mittels Polynomdivision zerlegt werden. Die Funktionsgleichung der schrägen Asymptote bestimmst du also über folgende zwei Schritte:

1. Schritt: Zerlegen des Funktionsterm von f_a mittels Polynomdivision.
2. Schritt: Bestimmen des Grenzwerts der Zerlegung.

b) (1) ► **Ermitteln der Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte des Graphen von f_a** (13P)

Extremstellen befinden sich da, wo die erste Ableitungsfunktion der jeweiligen betrachteten Funktion Nullstellen besitzt (notwendige Bedingung). Dabei wird über die zweite Ableitungsfunktion der betrachteten Funktion die Art der jeweiligen Extrema festgestellt (hinreichende Bedingung). Für eine Beispielextremstelle bei x_E kann also gelten:

- $f''(x_E) < 0 \implies$ Bei x_E befindet sich ein Maximum.
- $f''(x_E) > 0 \implies$ Bei x_E befindet sich ein Minimum.

Gehe also beim Bestimmen der Koordinaten und der Art der lokalen Extrempunkte der Graphen von f_a so vor:

1. Schritt: Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f_a'.
2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung bei den im 2. Schritt bestimmten Extremstellen.
3. Schritt: Berechnen der y - Koordinaten der bestimmten Extremstellen.

(2) ▶ **Bestimmen der Gleichung der Geraden, auf der die lokalen Hochpunkte liegen**

Gesucht ist hier die Ortskurve o_1 der Hochpunkte des Graphen von f_a. Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass alle lokalen Hochpunkte des Graphen von f_a auf einer Geraden liegen.
Möchtest du diese Geradengleichung nun bestimmen, so stellst du die x - Koordinate von H_a zunächst nach Parameter a um. Hast du die x - Koordinate nach a umgestellt, so setzt du diese in die von a abhängige y - Koordinate des Hochpunkts H_a ein.

(3) ▶ **Bestimmen der Gleichung der Geraden, auf der die lokalen Tiefpunkte liegen**

Gesucht ist nun die Ortskurve o_2 der Tiefpunkte der Graphen von f_a. Der Aufgabenstellung kannst du dabei entnehmen, dass alle lokalen Tiefpunkte von f_a auf einer Geraden liegen. Möchtest du diese Geradengleichung nun bestimmen, so gehst du auch hier wie oben vor.

(4) ▶ **Begründen, dass keiner der Graphen einen Wendepunkt besitzt**

Eine Funktion besitzt eine Wendestelle da, wo die zweite Ableitungsfunktion der betrachteten Funktion Nullstellen besitzt (notwendige Bedingung). Weiterhin gilt für die dritte Ableitungsfunktion der jeweiligen Funktion an einer Wendestelle x_W:
$f'''(x_W) \neq 0$.

Willst du nun zeigen, dass keiner der Graphen der Scharfunktion f_a einen Wendepunkt besitzt, so zeigst du, dass f_a die oben genannten Bedingungen für eine Wendestelle nicht erfüllt.

c) ▶ **Angeben für welche Werte von a die jeweiligen Graphen gezeichnet worden sind** (3P)

Das in der Aufgabenstellung gegebene Schaubild zeigt verschiedene Graphen der Scharfunktion f_a. Deine Aufgabe ist es nun, für diese Graphen die jeweiligen Parameterwerte des Parameters a zu bestimmen.
Betrachtest du die Graphen G_{I}, G_{II} und G_{III} genauer, so kannst du erkennen, dass die Lage des Tiefpunkts der jeweiligen Graphen klar zu erkennen ist:

- $T_{G_{\text{I}}}(2 \mid 0)$.
- $T_{G_{\text{II}}}(4 \mid 0)$.
- $T_{G_{\text{III}}}(6 \mid 0)$.

Im vorhergegangenen Aufgabenteil hast du bestimmt, dass die Koordinaten des Tiefpunkts T_a von f_a in Abhängigkeit von a so lauten: $T_a(3 \cdot a \mid 0)$.

d) ▶ **Untersuchen ob für $x > 1$ ein Punkt P mit minimalem Abstand zu $Q(1 \mid -4)$ existiert** (8P)

Nun sollst du den Graphen von f_1 betrachten. Die Funktion f_1 hat diesen Funktionsterm:
$f_1(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-1}$.
Deine Aufgabe ist es hier, zu untersuchen, ob es für $x > 1$ einen Punkt $P(x \mid f_1(x))$ gibt, dessen Abstand zum Punkt $Q(1 \mid -4)$ minimal ist. Gibt es einen solchen Punkt P, so ist es außerdem noch deine Aufgabe, dessen Koordinaten und Abstand zu Q anzugeben.

Willst du allgemein den Abstand d zwischen zwei beliebigen Punkten A und B berechnen, so verwendest du diese Formel:

$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ mit $A(x_A \mid y_A)$ und $B(x_B \mid y_B)$.

Willst du nun untersuchen, ob es für $x > 1$ einen Punkt $P(x \mid f_1(x))$ gibt, dessen Abstand zum Punkt $Q(1 \mid -4)$ minimal ist, so musst du zunächst in die obige Abstandsformel die allgemeinen Koordinaten eines Punktes einsetzen, der auf dem Graphen von f_a liegt. Diese sind: $P_{f_1}(x \mid f_1(x))$.
Setzt du ebenfalls die Koordinaten von Punkt Q in die Abstandsformel ein, so erhältst du einen von x abhängigen Term. Diesen Term kannst du als eine Abstandsfunktion d mit Funktionsterm $d(x)$ interpretieren, die für alle $x \in \mathbb{R}$ angibt, welchen Abstand der entsprechende Punkt auf dem Graphen von f_1 von Punkt Q hat.
Willst du nun ermitteln, ob es einen Punkt P nach obigen Vorgaben gibt, so untersuchst du d auf Minimalstellen. Gibt es eine Minimalstelle für $x > 1$, so gibt es einen Punkt P nach obigen Vorgaben. Bestimme in diesem Falle noch die Koordinaten von P und dessen Abstand zu Q.

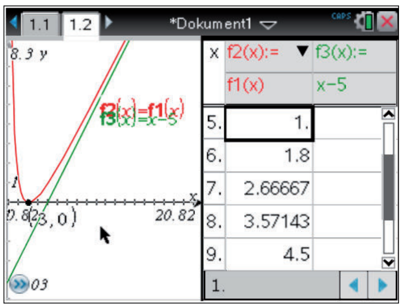
Gehe hier also so vor:

1. Schritt: Aufstellen der Abstandsfunktion d
2. Schritt: Untersuchen der Abstandsfunktion auf Minimalstellen
3. Schritt: Gegebenenfalls Koordinaten von P und Abstand zu Q bestimmen

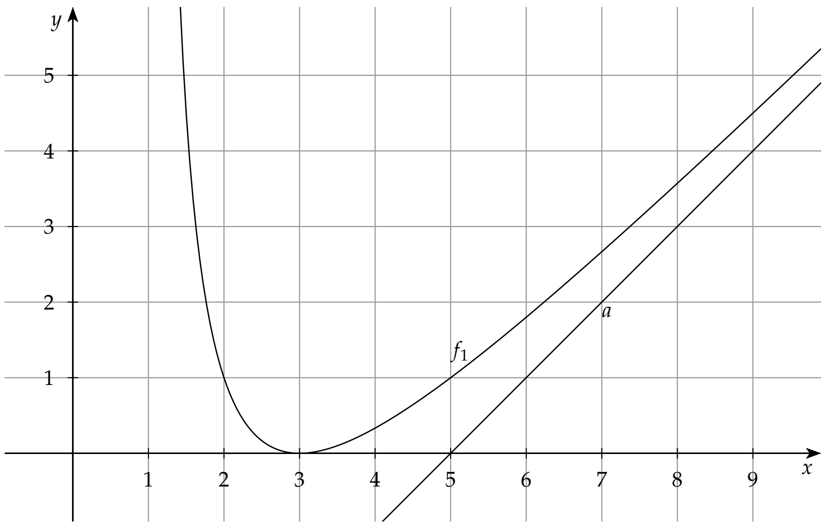
e) (1) ▶ **Überprüfen, ob der Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann** (10P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Graph von f_1, die Gerade mit der Gleichung $a(x) = x - 5$, die x-Achse, sowie die Senkrechte $x = 3$ eine Fläche einschließen, welche ins Unendliche reicht. Deine Aufgabe ist es dabei zu überprüfen ob der eben beschriebenen Fläche ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann. Dabei kann es hier sinnvoll sein, wenn du zunächst eine Skizze des Sachverhalts anfertigst.

Verwende dazu den `Graphs`-Modus deines CAS. In diesem zeichnest du zunächst den Graphen der Funktion f_1, sowie den Graphen der schiefen Asymptote a. Über die unten stehende Eingabenfolge lässt du dir dann die zugehörige Wertetabelle anzeigen, welche dir beim Skizzieren der Graphen behilflich sein kann.



`menu → 2: Ansicht → A: Wertetabelle...`



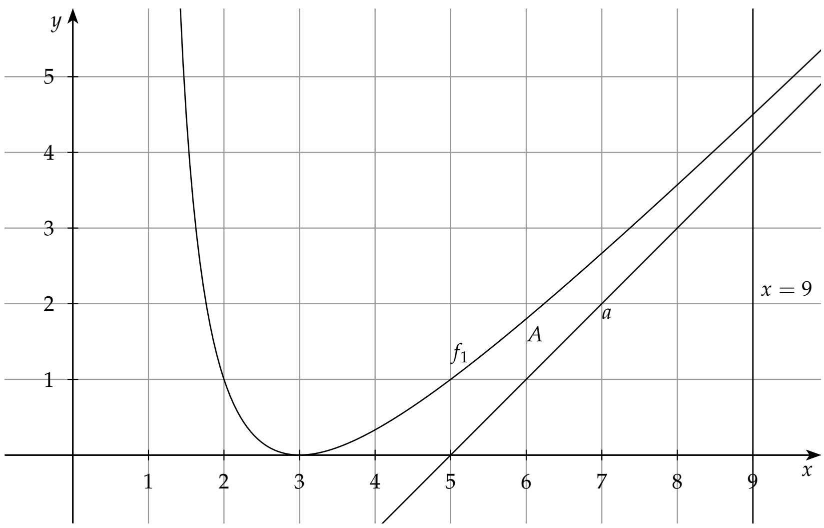
Der oben beschriebene Flächeninhalt berechnet sich über die Differenz zweier Integrale. Die untere Grenze des ersten Integrals bildet dabei die Senkrechte bei $x = 3$, es gilt also $x_0 = 3$. Die obere Grenze des ersten Integrals reicht bis ins Unendliche, für diese nimmst du zunächst eine Variable an, es könnte also $x_1 = g$ gelten. Der Graph von f_1 verläuft im gesamten betrachteten Intervall oberhalb der Geraden mit der Gleichung $a(x) = x - 5$. Deshalb musst du über die Gerade ab deren Nullstelle bei $x_2 = 5$ integrieren und dieses Integral vom eben beschriebenen subtrahieren. Auch bei diesem Integral reicht die obere Grenze ins Unendliche, es gilt also: $x_3 = g$.

(2) ▶ **Berechnen des Volumens V des Hohlraumes**

Die oben beschriebene Fläche wird nun nach rechts durch $x = 9$ begrenzt. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, so entsteht ein nach rechts offener Hohlkörper mit einem kegelförmigen Hohlraum. Deine Aufgabe ist es dabei, dass Volumen V dieses Hohlraums zu bestimmen.

Beim Lösen dieser Aufgabe kann es sinnvoll sein, wenn du dir zuerst eine Skizze des Sachverhalts anfertigst.

Verwende dazu wie oben wieder den `Graphs`-Modus deines CAS. Die Skizze des Sachverhalts sollte dann so aussehen:



Die Fläche mit dem Flächeninhalt A repräsentiert den Querschnitt des Hohlraums des nach rechts offenen Hohlkörpers. Wie du der Skizze oben entnehmen kannst, wird diese „nach oben" begrenzt durch den Graphen der Funktion f_1 und „nach unten" wird sie begrenzt durch die schiefe Asymptote a mit $a(x) = x - 5$.

Willst du das Volumen V des Hohlraums berechnen, so lässt du die Fläche mit dem Flächeninhalt A um die x-Achse rotieren. Für eine beliebige Funktion h berechnet sich das Rotationsvolumen V_h zwischen zwei beliebigen Grenzen x_a und x_b (wobei $x_a < x_b$ gilt) über diesen Ansatz:

$$V_h = \pi \cdot \int_{x_a}^{x_b} (h(x))^2 \, dx.$$

Bei der Berechnung des Volumens V des Hohlraums musst du jedoch beachten, dass sich das Volumen V aus der Differenz des Volumens V_1, welches f in den Grenzen zwischen $x_{u_1} = 3$ und $x_{o_1} = 9$ einschließt, und des Volumens V_2, welches a in den Grenzen $x_{u_2} = 5$ und $x_{o_2} = 9$ einschließt (siehe Skizze), berechnet.

f) (1) ▶ **Modellierung der Gleisverbindung durch eine ganzrationale Funktion** (5P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die beiden Graphenteile von f_1 Bestandteile eines Eisenbahnnetzes sind. Dabei soll zwischen den beiden Extrempunkten des Graphen von f_1 eine neue Gleisverbindung gebaut werden. Weiterhin soll der Übergang zu der durch f_1 modellierten Strecke an beiden Punkten jeweils „ohne Knick" erfolgen, was bedeutet, dass die zu modellierende Funktion in beiden Punkten den gleichen Anstieg wie f_1 besitzen muss.
Deine Aufgabe ist es nun, eben diese neue Gleisverbindung durch eine ganzrationale mit möglichst geringem Grad zu modellieren.

Wie oben schon beschrieben, soll der Graph der zu modellierenden Funktion h durch die Extrempunkte des Graphen von f_1 bei

- $H_1(-1 \mid -8)$
- $T_1(3 \mid 0)$

verlaufen und dabei soll dieser Übergang „ohne Knick" erfolgen, das heißt, dass h in diesen Punkten die gleiche Steigung wie f_1 besitzen muss. Es ergeben sich also insgesamt vier Bedingungen an die Modellierungsfunktion h, was zu Folge hat, dass diese mindestens einen Grad von 3 besitzen muss.

Die allgemeine Form des Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist:
$h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

Um Parameter $a,\ b,\ c$ und d zu ermitteln, bedarf es hier also insgesamt vier Bedingungen an die Modellierungsfunktion h. Zwei dieser Bedingungen ergeben sich aus der Forderung, dass der Graph von h durch die Punkte H_1 und T_1 verlaufen soll:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & h(-1) = & -8 \\ \text{II} & h(3) = & 0 \end{array}$$

Weiterhin soll h bei $x_H = -1$ und $x_T = 3$ die gleiche Steigung wie f_1 besitzen. Da es sich bei $x_H = -1$ und $x_T = 3$ um Extremstellen handelt, liegt hier eine Steigung von Null vor. Leite h also zuerst in Abhängigkeit von $a,\ b,\ c$ und d wie oben mit deinem CAS ab und bilde anschließend die zwei weiteren Bedingungen an die Modellierungsfunktion h:

III $h'(-1) = 0$
IV $h'(3) = 0$

Es ergibt sich also dieses Gleichungssystem:

I $h(-1) = -8$
II $h(3) = 0$
III $h'(-1) = 0$
IV $h'(3) = 0$

(2) ► **Überprüfen, ob auch s die geforderten Bedingungen erfüllt**

Damit die Funktion s, mit $s(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot (x-1)\right) - 4$ ebenfalls als Modellierungsfunktion für die neue Gleisverbindung in Frage kommt, muss diese folgende Bedingungen erfüllen:

- Der Graph von s muss durch die Extrempunkte des Graphen von f_1 verlaufen. Es muss also gelten:

  $\Rightarrow\ s(-1) = -8$ und $s(3) = 0$.

- Der Übergang an den beiden Extrempunkten soll ohne „Knick“ verlaufen. Es muss also gelten:

  $\Rightarrow\ s'(-1) = 0$ und $s'(3) = 0$.