a) ▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (11P)

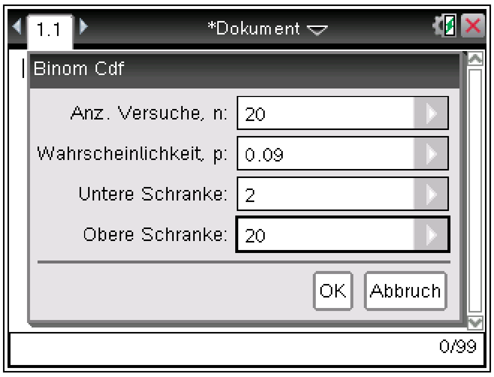
Im Aufgabenteil a) werden Lampen der Firma F_1 betrachtet. Laut Aufgabentext liegt bei dieser Firma eine Ausschussquote von 9 % vor. Da die Lampen der laufenden Produktion entnommen werden, kannst du sagen: Jede der entnommen Lampen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 9 % unbrauchbar. Da außerdem nur zwischen den beiden Merkmalsausprägungen „unbrauchbar" und „nicht unbrauchbar" unterschieden wird, kann die Anzahl der unbrauchbaren Lampen näherungsweise je durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden.

Ereignis A

Der laufenden Produktion werden 20 Lampen entnommen. Sei X_1 die Zufallsgröße, welche die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in dieser Stichprobe beschreibt. X_1 kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 20$ und $p = 0,09$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 der Lampen unbrauchbar sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 \geq 2)$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 \geq 2)$. Den Befehl für „kumulierte Binomialverteilung" findest du im CAS unter `menu → 5 → 5 → E`. Gib bei $n = 20$, $p = 0,09$, als untere Grenze 2 und als obere Grenze 20 ein.

binomCdf(20,0.09,2,20)   0.548398



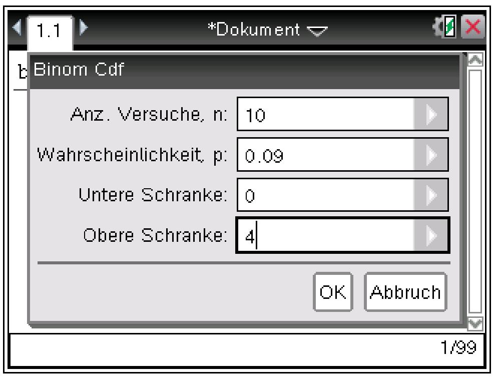
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 54,84 % sind mindestens zwei von 20 Lampen unbrauchbar.

Ereignis B

Nun werden der Produktion 10 Lampen entnommen. Die Anzahl der unbrauchbaren Lampen in der Stichprobe kann also durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X_2 beschrieben werden mit $n = 10$ und $p = 0,09$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr brauchbare als unbrauchbare Lampen in der Stichprobe enthalten sind. Dies ist der Fall, wenn **weniger als 5** unbrauchbare Lampen bzw. **mehr als 5** brauchbare Lampen gefunden werden. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < 5) = P(X_2 \leq 4)$:

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 \leq 4)$. Den Befehl für „kumulierte Binomialverteilung" findest du im CAS unter `menu → 5 → 5 → E`. Gib bei $n = 10$, $p = 0,09$, als untere Grenze 0 und als obere Grenze 4 ein.

binomCdf(10,0.09,0,4)   0.99899



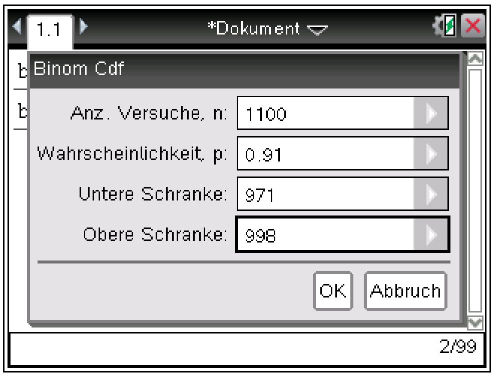
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 99,90 % sind unter 10 Lampen mehr brauchbare als unbrauchbare.

Ereignis C

Zuletzt werden der Produktion 1.100 Lampen entnommen, allerdings wird dieses Mal die Anzahl der funktionstüchtigen Lampen betrachtet. Da 9 % unbrauchbar sind, sind 91 % der Lampen funktionstüchtig. Die Anzahl der funktionstüchtigen Lampen in der Stichprobe kann also durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X_3 mit $n = 1.100$ und $p = 0,91$ beschrieben werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass **mindestens** 971 und **höchstens** 998 funktionstüchtige Lampen gefunden werden. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(971 \leq X_3 \leq 998)$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(971 \leq X_3 \leq 998)$. Den Befehl für „kumulierte Binomialverteilung“ findest du im CAS unter `menu` → `5` → `5` → `E`. Gib bei $n = 1.100$, $p = 0,91$, als untere Grenze 971 und als obere Grenze 998 ein.

binomCdf(1100,0.91,971,998)   0.390004



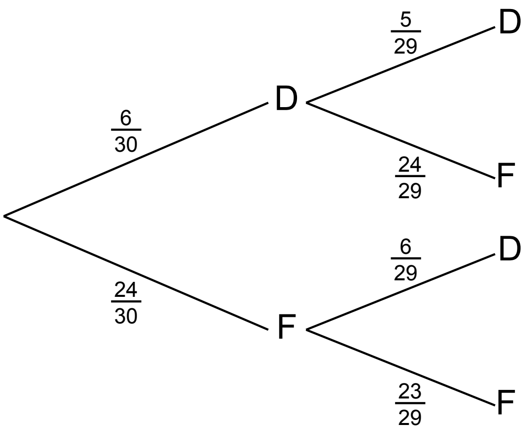
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 39,00 % sind unter 1.100 Lampen mindestens 971 und höchstens 998 funktionstüchtige Lampen zu finden.

b) (1) ▶ **Wahrscheinlichkeit für die Annahme des Kartons berechnen** (7P)

Es ist bekannt, dass sich im Karton 30 Lampen der Firma F_2 befinden und dass genau 6 dieser Lampen defekt sind. Der Händler entnimmt dem Karton zwei Lampen ohne Zurücklegen. Wenn beide funktionstüchtig sind, dann nimmt er den Karton an.

Die Frage ist also: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler dem Karton zwei funktionstüchtige Lampen entnimmt?

Zu Beginn befinden sich 30 Lampen im Karton, von denen 6 defekt sind. Wenn die erste entnommen ist, dann befinden sich noch 29 Lampen im Karton. Du kannst die Situation in einem Baumdiagramm darstellen. Sei hier D das Ereignis „Eine Lampe ist defekt“ und F das zugehörige Gegenereignis „Eine Lampe ist funktionstüchtig.“:



Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei funktionstüchtige Lampen entnommen werden. Dieses Ereignis ist durch den Pfad $F - F$ dargestellt. Mit der Pfadregel folgt die zugehörige Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{zwei funktionstüchtige Lampen}) = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} \approx 0,6345$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 63,45 % nimmt der Händler den Karton mit Lampen an, wenn sechs der 30 Lampen defekt sind.

(2) ► **Höchstanzahl der defekten Lampen berechnen**

Im ersten Teil dieser Aufgabe waren **sechs der 30** Lampen im Karton defekt. Nun ist die Anzahl der defekten Lampen unbekannt; du kannst also sagen, es gibt $\boldsymbol{x}$ **von 30** defekten Lampen.

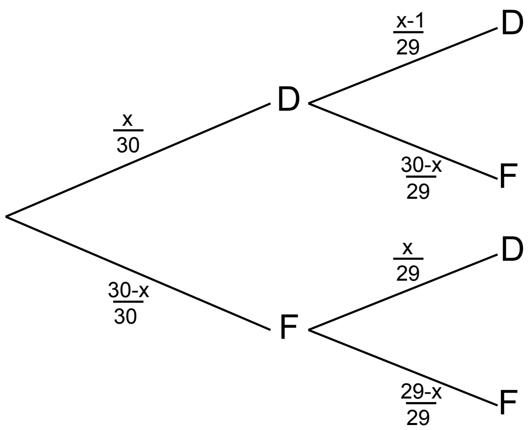
Wieder werden dem Karton 2 Lampen entnommen und wieder wird der Karton angenommen, wenn beide funktionstüchtig sind. Gefragt ist, wie groß die Anzahl x der defekten Lampen maximal werden darf, damit der Karton noch mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,5 angenommen wird.

Du kannst so vorgehen:

- Betrachte dein Baumdiagramm aus dem ersten Teil der Aufgabe und modifiziere es derart, dass es auf die neue Situation passt.
- Berechne in Abhängigkeit von x die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei funktionstüchtige Lampen zu ziehen. Diese Wahrscheinlichkeit muss mindestens 0,5 betragen. Löse so nach x auf.

1. Schritt: Baumdiagramm modifizieren

In der ersten Stufe gibt es insgesamt 30 Lampen und x davon sind defekt. Also sind $\boldsymbol{30 - x}$ funktionstüchtig. Die Lampen werden ohne Zurücklegen gezogen.



2. Schritt: Wahrscheinlichkeit für die Annahme berechnen

Der Karton wird angenommen, wenn beide gezogenen Lampen funktionstüchtig sind. Berechne die zugehörige Wahrscheinlichkeit über die Pfadregel:

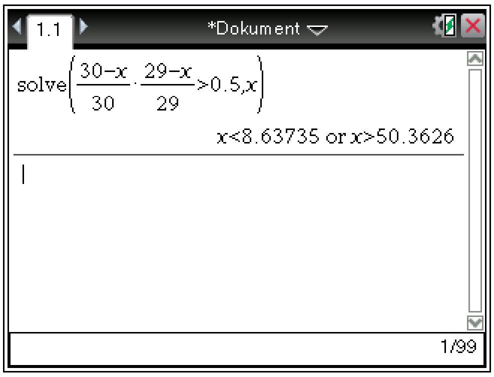
$$\begin{aligned} P(\text{Karton wird angenommen}) &= P(F \cap F) \\ &= \frac{30-x}{30} \cdot \frac{29-x}{29} \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit soll mindestens 0,5 betragen. Aus dieser Bedingung erhältst du die Ungleichung

$$\frac{30-x}{30} \cdot \frac{29-x}{29} > 0,5$$

Du kannst die Ungleichung mit dem `solve`-Befehl lösen.

Das CAS liefert $x \leq 8,64$ und $x \geq 50,36$. Da nur 30 Lampen im Karton sind, kommt nur die erste Lösung in Frage.



Damit folgt: Im Karton dürfen höchstens 8 defekte Lampen sein, damit der Karton mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % angenommen wird.

c) ▶ **Wahrscheinlichkeitsverteilung vervollständigen** (8P)

Betrachte die möglichen Ereignisse in der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Überlege in einem ersten Schritt, welche Situationen bei den beiden Ereignissen vorliegen, d.h. welche Lampe verkauft wurde und ob sie funktionstüchtig bzw. defekt war. Berechne sodann die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Beachte dabei: Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ergeben die Wahrscheinlichkeiten in der Summe den Wert 1. Es genügt also, wenn du drei der vier Wahrscheinlichkeiten ausführlich berechnest.

1. Schritt: $P(G = -1,02)$ berechnen

Wir beginnen mit dem Ereignis $G = -1,02$. Es tritt ein, wenn eine von F_2 hergestellte Lampe verkauft wird, die Lampe aber defekt ist und der Verkaufspreis zurückerstattet werden muss. Die Wahrscheinlichkeit $P(G = -1,02)$ entspricht also der Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- die Lampe von der Firma F_2 stammt

und

- defekt ist.

Aus dem Aufgabentext weißt du, dass 65 % der Lampen von der Firma F_2 geliefert werden. Also stammt jede Lampe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,65 von der Firma F_2.

Darüber hinaus weißt du, dass die Ausschussquote der Firma F_2 bei 7 % liegt. Nach der Pfadregel folgt damit für unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$P(F_2 \text{ und defekt}) = 0,65 \cdot 0,07 = 0,0455.$

Also folgt auch: $P(G = -1,02) = 0,0455.$

2. Schritt: $P(G = -0,98)$ berechnen

Das Ereignis $G = -0,98$ tritt ein, wenn eine von F_1 hergestellte Lampe verkauft wird, die Lampe aber defekt ist und der Verkaufspreis zurückerstattet werden muss. Die Wahrscheinlichkeit $P(G = -0,98)$ entspricht also der Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- die Lampe von der Firma F_1 stammt

und

- defekt ist.

Aus dem Aufgabentext weißt du, dass 35 % der Lampen von der Firma F_1 geliefert werden. Also stammt jede Lampe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,35 von der Firma F_1.
Darüber hinaus weißt du, dass die Ausschussquote der Firma F_1 bei 9 % liegt. Nach der Pfadregel folgt damit für unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit:
$P(F_1 \text{ und defekt}) = 0,35 \cdot 0,09 = 0,0315.$

Also folgt auch: $P(G = -0,98) = 0,0315.$

3. Schritt: $P(G = 0,47)$ berechnen

Zuletzt soll das Ereignis $G = 0,47$ betrachtet werden. Der Händler verkauft die Lampen beider Hersteller zu je 1,49 €. Er macht also 0,47 € Gewinn, wenn die Lampe im Einkauf 1,02 € gekostet hat. Damit weißt du: Das Ereignis $G = 0,47$ tritt ein, wenn eine von F_2 hergestellte Lampe verkauft wird, die Lampe funktionstüchtig ist. Die Wahrscheinlichkeit $P(G = 0,47)$ entspricht also der Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- die Lampe von der Firma F_2 stammt

und

- nicht defekt ist.

Aus dem Aufgabentext weißt du, dass 65 % der Lampen von der Firma F_2 geliefert werden. Also stammt jede Lampe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,65 von der Firma F_1.
Darüber hinaus weißt du, dass die Ausschussquote der Firma F_2 bei 7 % liegt. Also sind 93 % der Lampen funktionstüchtig. Nach der Pfadregel folgt damit für unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit:
$P(F_2 \text{ und nicht defekt}) = 0,65 \cdot 0,93 = 0,6045.$

Also folgt auch: $P(G = 0,47) = 0,6045.$

4. Schritt: Wahrscheinlichkeitsverteilung vervollständigen

Wie oben bereits erwähnt, ergeben die Wahrscheinlichkeiten in der Wahrscheinlichkeitsverteilung in ihrer Summe 1. Bisher liegen die Wahrscheinlichkeiten $0,0455$, $0,0315$ und $0,6045$ vor. Für die Wahrscheinlichkeit $P(G = 0,51)$ muss also gelten:
$P(G = 0,51) = 1 - (0,0455 + 0,0315 + 0,6045) = 1 - 0,6815 = 0,3185$

Damit erhältst du die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung von G:

g_i	$-1,02$	$-0,98$	$0,47$	$0,51$
$P(G = g_i)$	$0,0455$	$0,0315$	$0,6045$	$0,3185$

▶ Erwartungswert berechnen

Du hast nun die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt. Den Erwartungswert kannst du nun so berechnen:

Seien g_i die die möglichen Werte von G und $P(G = g_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, jeweils für $i = 1, ..., 4$. Für den Erwartungswert $E(G)$ gilt dann:

$$E(G) = \sum_{i=1}^{4}(g_i \cdot P(G = g_i)).$$

In Worten kannst du sagen: Multipliziere jeden möglichen Wert von G mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit und addiere diese Ergebnisse. So ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(G) &= (-1,02) \cdot 0,0455 + (-0,98) \cdot 0,0315 + 0,47 \cdot 0,6045 + 0,51 \cdot 0,3185 \\ &= 0,36927 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert von G ist $E(G) = 0,36927$. Das bedeutet: Im langfristigen Mittel macht der Discounter pro Lampe einen Gewinn von etwa 37 ct.

d) **▶ Fehler auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen** (4P)

Wir definieren zunächst einige Ereignisse:

- Sei L das Ereignis „Eine Lampe hat einen Fehler im Leuchtsystem“,
- sei S das Ereignis „Eine Lampe hat einen Fehler im Schraubmechanismus“,
- seien $\overline{L}$ und $\overline{S}$ die zugehörigen Gegenereignisse.

Das Ereignis: „Es tritt mindestens einer der beiden Fehler auf“ kannst du dann darstellen als $L \cup S$; das Ereignis „Es treten beide Fehler gleichzeitig auf“ entspricht dann $L \cap S$.

Aus der Aufgabenstellung kennst du die Werte:

- $P(S) = 0,02$
- $P(L \cap S) = 0,001$
- $P(L \cup S) = 0,069$

Du sollst nun untersuchen, ob die Fehler unabhängig voneinander auftreten. Dies ist der Fall, wenn die Ereignisse L und S stochastisch unabhängig sind. Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$P(L \cap S) = P(L) \cdot P(S)$.

Du kannst so vorgehen:

- Über eine Vierfeldertafel oder über den Additionssatz kannst du die Wahrscheinlichkeit $P(L)$ berechnen.
- Setze dann $P(L \cap S)$, $P(L)$ und $P(S)$ in die obige Gleichung ein und untersuche, ob sie erfüllt ist.

1. Schritt: $P(L)$ berechnen

Du kannst die Wahrscheinlichkeit $P(L)$ über den Additionssatz (Lösungsweg A) oder über eine Vierfeldertafel (Lösungsweg B) bestimmen.

►► Lösungsweg A: Lösung über den Additionssatz

Der Additionssatz lautet:

$P(L \cup S) = P(L) + P(S) - P(L \cap S)$.

Setze die bekannten Wahrscheinlichkeiten ein und löse nach $P(L)$ auf:

$$\begin{aligned} P(L \cup S) &= P(L) + P(S) - P(L \cap S) \\ 0,069 &= P(L) + 0,02 - 0,001 \\ 0,069 &= P(L) + 0,019 \qquad \mid -0,019 \\ 0,05 &= P(L) \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % hat eine Lampe einen Fehler im Leuchtsystem.

►► Lösungsweg B: Lösung über eine Vierfeldertafel

Überlege, welche der bekannten Wahrscheinlichkeiten man direkt in eine Vierfeldertafel eintragen könnte: Das sind $P(S)$ und $P(S \cap L)$. Um eine Vierfeldertafel vollständig ausfüllen zu können, werden aber mehr als zwei Wahrscheinlichkeiten benötigt.

Du weißt allerdings: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,069 hat eine Lampe **mindestens einen** der beiden Fehler. Das zugehörige Gegenereignis ist: „Ein Lampe hat keinen Fehler im Leuchtsystem und keinen Fehler im Schraubmechanismus“ und kann beschrieben werden als das Ereignis $\overline{L} \cap \overline{S}$. Für seine Wahrscheinlichkeit gilt:

$P(\overline{L} \cap \overline{S}) = 1 - 0,069 = 0,931$.

Damit kennst du drei Wahrscheinlichkeiten, die du in die Vierfeldertafel eintragen kannst. Alternativ bieten auch eine Vierfeldertafel mit **absoluten Werten** an, wobei von 1.000 Lampen ausgegangen wird.

	S	$\overline{S}$	$\sum$
L	$0,001$		
$\overline{L}$		$0,931$	
$\sum$	$0,02$		1

	S	$\overline{S}$	$\sum$
L	1		
$\overline{L}$		931	
$\sum$	20		1.000

Die Einträge der inneren vier Felder müssen in ihrer Summe sowohl zeilen- als auch spaltenweise den Wert im entsprechenden äußeren Feld ergeben. So kannst du die Vierfeldertafel vervollständigen:

	S	$\overline{S}$	$\sum$
L	$0,001$	**0,049**	**0,05**
$\overline{L}$	**0,019**	$0,931$	**0,95**
$\sum$	$0,02$	**0,98**	1

	S	$\overline{S}$	$\sum$
L	1	**49**	**50**
$\overline{L}$	**19**	931	**950**
$\sum$	20	**980**	1.000

Du findest nun den Eintrag $P(L) = 0,05$.

2. Schritt: Stochastische Unabhängigkeit prüfen

Setze $P(L) = 0,05$, $P(S) = 0,02$ und $P(L \cap S) = 0,001$ ein in die Formel von oben:

$$\begin{aligned} P(L \cap S) &= P(L) \cdot P(S) \\ 0,001 &= 0,05 \cdot 0,02 \\ 0,001 &= 0,001 \end{aligned}$$

Die Gleichung ist erfüllt. Also folgt: S und L sind stochastisch unabhängig. Im Sachzusammenhang interpretiert heißt das:

Die Fehler im Leuchtsystem und im Schraubmechanismus der Lampen treten unabhängig voneinander auf.