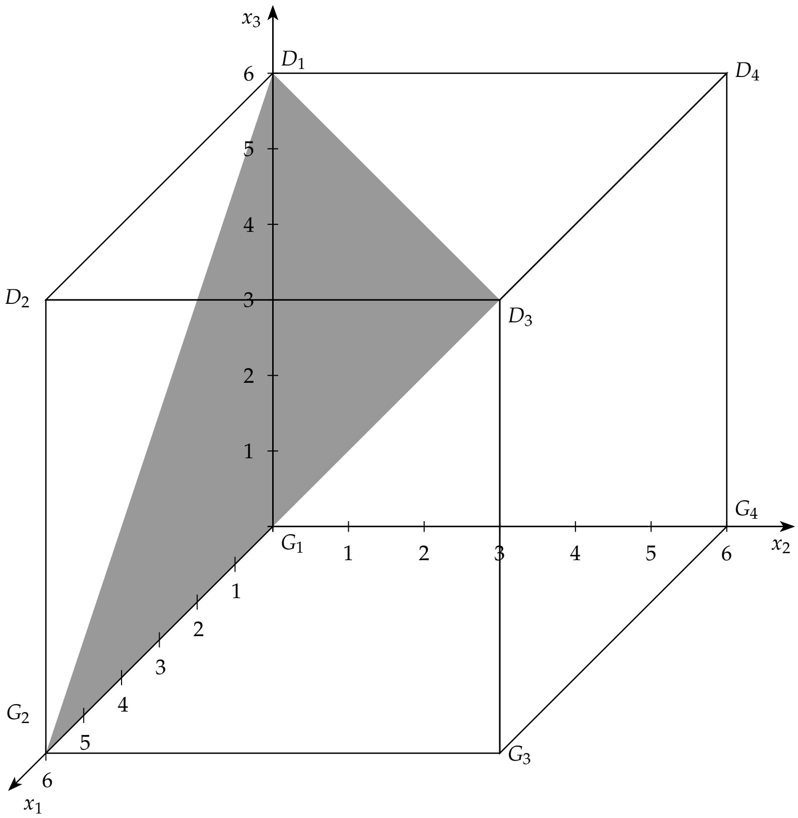
1. a) ▶ **Ebenengleichung bestimmen** (5BE)

Zeichnung zum besseren Verständnis.



Die Ebene E wird durch die Punkte G_2, D_3 und D_1 $(0 \mid 0 \mid 6)$ eindeutig bestimmt. Bestimme zunächst eine Gleichung der Ebene in Parameterform. Wir wählen als Stützvektor den Vektor $\overrightarrow{D_1}$ und die Richtungsvektoren $\overrightarrow{D_3D_1}$ sowie $\overrightarrow{G_2D_1}$

$$E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Koordinatenform der Ebenengleichung benötigst du den **Normalenvektor** von E. Wir bestimmen ihn über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & - & (-1) \cdot 1 \\ (-1 \cdot 1) & - & 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & - & 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die vorläufige Koordinatenform der Ebene $E: x_1 - x_2 + x_3 = d$. Setze nun die Koordinaten des Aufpunktes D_1 ein und löse nach d auf:

$$0 - 0 + 6 = d \quad \Longrightarrow \quad E: x_1 - x_2 + x_3 = 6$$

b) ▶ **Volumen der Pyramide berechnen** (4BE)

Das Volumen einer Pyramide berechnest du über die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, wobei G die Grundfläche und h die Höhe der Pyramide darstellen.

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Dreieck; für seinen Flächeninhalt gilt $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$, wobei g die Grundseite des Dreiecks und h_g die zugehörige Höhe sind.
Wähle für g z.B. $g = \overline{G_2D_2} = 6$ und als $h_g = \overline{D_2D_3} = 6$.

Für den Inhalt der Grundfläche ergibt sich damit $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$.

Die Höhe der Pyramide ist z.B. $h = \overline{D_2D_1} = 6$.

Das Volumen der Pyramide beträgt somit $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36\,\text{VE}$.

▶ Prozentuale Volumen der Pyramide zum Volumen des Würfels berechnen

Das Volumen des Würfels beträgt $6^3 = 216\,\text{VE}$. Für den prozentualen Anteil der Pyramide am gesamten Volumen gilt somit:
$p\,\% = \dfrac{36}{216} \cdot 100 \approx 16{,}67\,\%$.

Die Pyramide nimmt etwa $16{,}67\,\%$ des Würfelvolumens ein.

c) **▶ Schnittwinkel berechnen** (4BE)

Die Grundfläche $G_1G_2G_3G_4$ liegt in der x_1-x_2-Koordinatenebene. Der Normalenvektor dieser Ebene ist also genau $\overrightarrow{n}_{\text{Grundfläche}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den Normalenvektor der Ebene E hast du bereits bestimmt (bzw. er kann direkt aus der Koordinatenform der Ebenengleichung ausgelesen werden): $\overrightarrow{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den Winkel α, den diese beiden Vektoren einschließen, gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1 + (-1) + 1}} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}577$$

$\cos^{-1}(0{,}577) \approx 54{,}76°$

Der Neigungswinkel der Ebene E gegenüber der Grundfläche $G_1G_2G_3G_4$ ist etwa $54{,}76°$ groß.

▶ Drei Punkte angeben

Ein mögliches Punkte-Tripel wären die Punkte D_1, D_2 und G_3, ein anderes die Punkte D_2, D_3, G_4 etc. Allgemein lässt sich sagen: Die drei Punkte müssen eine Ebene so festlegen, dass einer der Richtungsvektoren parallel zu einer der **Würfelkanten** verläuft, der andere parallel zur **Flächendiagonalen** der anliegenden Würfelseite.

d) ▶ **Parallel zu E mit Abstand $\sqrt{3}$ nachweisen** (3BE)

1. Schritt: Parallelität nachweisen

Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren linear abhängig sind.

Dies ist offensichtlich der Fall, da die Normalenvektoren $\overrightarrow{n}_E = \overrightarrow{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ identisch sind.

2. Schritt: Abstand nachweisen

Da die beiden Ebenen parallel verlaufen, sind die Abstände zwischen den beiden Ebenen in allen Punkten gleich. Bestimme also die Koordinaten eines beliebigen Punktes in F; am besten eignet sich hierfür einer der **Spurpunkte**, z.B. $S_1\,(3 \mid 0 \mid 0)$. Der Abstand von S_1 zur Ebene E entspricht auch dem Abstand der Ebene F zur Ebene E.

Den Abstand eines Punktes von einer Ebene kannst du **immer** über die Hessesche Normalenform bestimmen. Allgemein lautet diese Form: $E: \dfrac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d(P;E)$.

Für unsere Ebene E ergibt sich damit die HNF:

$$E_{\text{HNF}}: \frac{|x_1 - x_2 + x_3 - 6|}{\sqrt{3}} = d(P;E)$$

Setze nun die Koordinaten von S_1 für x_1, x_2 und x_3 ein. Das Ergebnis entspricht genau dem Abstand von S_1 und E:

$$d(S_1;E) = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Ebenen E und F parallel mit Abstand $\sqrt{3}$ verlaufen.

Alternativ kannst du natürlich auch den Abstand von einem der Punkte D_1, G_2 oder D_3 zur Ebene F berechnen. Das Ergebnis bleibt gleich.

e) ▶ **Schnittpunkte mit der $x_{1,3}$-Achse bestimmen** (10BE)

Die Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen werden auch **Spurpunkte** genannt. Sie haben die Koordinaten $S_1\,(x_1 \mid 0 \mid 0)$, $S_2\,(0 \mid x_2 \mid 0)$ und $S_3\,(0 \mid 0 \mid x_3)$.

Gefragt ist nach den Punkten S_1 und S_3. Setze die bereits bekannten Koordinaten in die Ebenengleichung von F ein und löse nach der dritten auf:

$$S_1: x_1 - 0 + 0 = 3 \quad \Longrightarrow x_1 = 3 \quad \Longrightarrow S_1\,(3 \mid 0 \mid 0)$$

$$S_3: 0 - 0 + x_3 = 3 \quad \Longrightarrow x_3 = 3 \quad \Longrightarrow S_3\,(0 \mid 0 \mid 3)$$

▶ **Lage von $M_{G_1G_2}$ in F nachweisen**

Berechne den Mittelpunkt $M_{G_1G_2}$.

$\overrightarrow{M}_{\overrightarrow{G_1G_2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{G}_1 + \overrightarrow{G}_2\right)$ Setze Werte ein

$\overrightarrow{M}_{G_1G_2} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\overrightarrow{M}_{G_1G_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{M}_{G_1G_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Mittelpunkt der Strecke $[G_1G_2]$ lautet $M_{G_1G_2}\,(6 \mid 3 \mid 0)$.

Führe nun eine Punktprobe durch und prüfe, ob $M_{G_1G_2}$ ein Punkt der Ebene F ist:

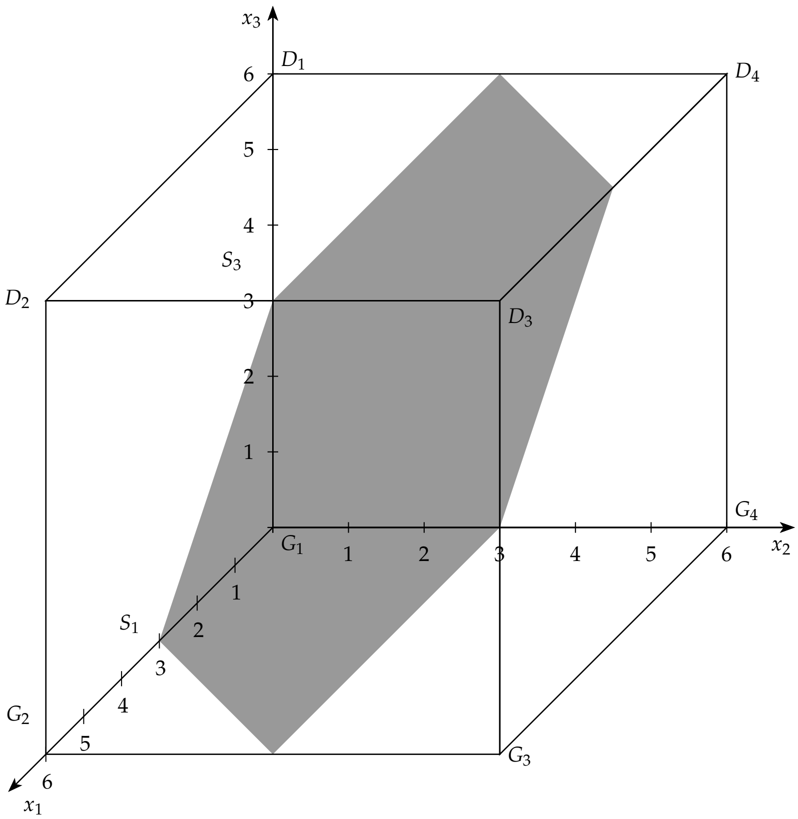
$x_1 - x_2 + x_3 = 3$ Setze die Werte von $M_{G_1G_2}$ ein

$6 - 3 + 0 = 3$

$3 = 3$ Wahre Aussage

Somit ist gezeigt, dass der Punkt $M_{G_1G_2} = (6 \mid 3 \mid 0)$ in der Ebene F liegt.

▶ Sechseck im Würfel zeichnen



▶ Flächeninhalt des Sechsecks berechnen

Ein reguläres Sechseck hat den Flächeninhalt: $A = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, wobei a die **Kantenlänge** des Sechsecks darstellt.

Berechne die Länge der Seite a. Die Schnittpunkte S_1 und S_3 bilden mit dem Ursprung ein rechtwinkliges Dreieck. Berechne mit dem Satz von Pythagoras die Hypotenuse a.

$$\begin{aligned} a^2 &= 3^2 + 3^2 \\ a^2 &= 9 + 9 \\ a^2 &= 18 \qquad \mid \sqrt{} \\ a &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

Berechne nun den Flächeninhalt.

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{3}{2}a^2 \cdot \sqrt{3} \qquad \text{Werte einsetzen} \\ &= \tfrac{3}{2} \cdot 18 \cdot \sqrt{3} \\ &= 3 \cdot 9 \cdot \sqrt{3} \\ &= 27\sqrt{3} \end{aligned}$$

Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von $27\sqrt{3}$ FE.

f) **► Mögliche Figuren angeben** (4BE)

Wird der Würfel durch die Ebenen in dieser Form geschnitten, entstehen als Schnittfigur ein Punkt, ein Dreieck und ein Sechseck.

Die Ebenen dieser Form sind alle parallel verschoben zu der Ebene F.

1. Schritt: Punkt als Schnittfigur

Verschiebt man die Ebenen so, dass diese durch den Punkt D_2 oder G_4 gehen, erhält man als Schnittmenge einen Punkt. Berechne a für diese zwei Ebenen.

Setze die Koordinaten von D_2 bzw. von G_4 in die Ebenengleichung ein.

$$\begin{aligned} a &= x_1 - x_2 + x_3 \qquad \text{Setze Werte ein} \\ a_{D_2} &= 6 - 0 + 6 \\ a_{D_2} &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= x_1 - x_2 + x_3 \qquad \text{Setze Werte ein} \\ a_{G_4} &= 0 - 6 + 0 \\ a_{G_4} &= -6 \end{aligned}$$

2. Schritt: Dreieck als Schnittfigur

Ausgehend von den Ebenen mit $a = 12$ bzw. $a = -6$ kann man folgendes beobachten:

Verkleinert sich der Parameterwert von 12 aus, z.B. auf 11, 10 etc., so finden wir als Schnittfigur ein Dreieck vor. Dabei liegen die Eckpunkte auf den Strecken $[G_2D_2]$, $[G_2G_3]$ und $[D_2D_1]$. Analog verhält es sich, wenn a von -6 aus stückweise **vergrößert** wird.

Von $a = 12$ her kommend finden wir mit der Ebene E die Ebene, die ein Dreieck als Schnittfigur erzeugt und zwar für $a = 6$. Es gilt also, dass für $12 > a \geq 6$ die Schnittfigur die Form eines Dreiecks hat; analog gilt das für $-6 < a \leq 0$. Hier würde das „letzte Dreieck" die Eckpunkte G_2, G_3 und D_4 besitzen.

Für alle Werte von a mit $-6 < a < 6$ hat die Schnittfigur die Form eines **Sechsecks**.