Aufgabe I 2

Die Maple-Lösung zu dieser Aufgabe kannst du dir unter folgendem Link herunterladen:

▶ Download

Hier folgt nun die Lösung mit dem TI NSpire CX CAS:

a) ▶ **K_f aus dem Graph von $\cos(x)$ entwickeln** (5VP)

Die „allgemeine Kosinusfunktion“ hat die Gleichung $y = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$. Bei der „normalen“ Kosinusfunktion sind $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ und $d = 0$.

Bringe die Gleichung von f auf diese Form und erhalte $f(x) = -\cos(\pi \cdot x) + 1$.

Im Funktionsterm von f kannst du also die Parameter $a = -1$, $b = \pi$ und $d = 1$ ausmachen. Jeder dieser Parameter hat einen bestimmten Einfluss auf den Graph von f.

$a = -1$ **spiegelt** den Graph der Kosinusfunktion an der x-Achse.

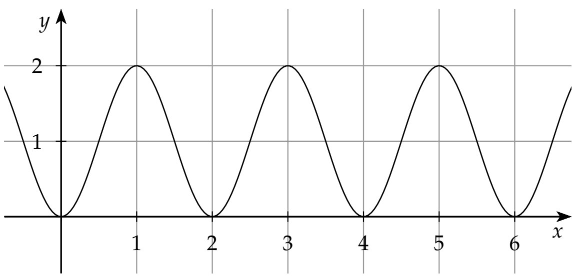
$b = \pi$ **streckt** den Graph der Kosinusfunktion um den Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung und verändert damit die **Periode** p von $p = 2\pi$ zu $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

$d = 1$ schließlich **verschiebt** den Graph der Kosinusfunktion um 1 LE in y-Richtung, also nach oben.

Insgesamt kannst du sagen: Der Graph von f geht aus dem der Kosinusfunktion hervor durch eine Streckung um Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung, eine Spiegelung an der x-Achse und eine anschließende Verschiebung um 1 LE nach oben.

▶ **Nullstellen von f berechnen**

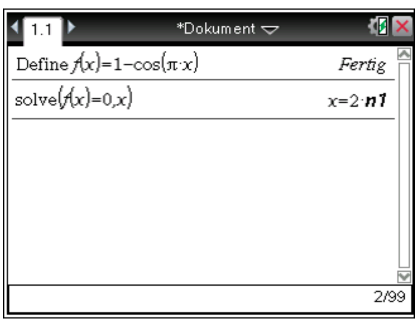
Du kannst dir zur besseren Orientierung zunächst den Graph von f mit dem CAS zeichnen lassen:



Setze die Gleichung von f mit 0 gleich und löse nach x auf, um die Nullstellen zu erhalten:

$1 - \cos(\pi x) = 0$

Wir definieren zunächst $f(x)$. Anschließend kannst du die Gleichung im `Calculator`-Modus deines CAS mit dem `solve`-Befehl lösen. Achte darauf, dass dein CAS auf **Bogenmaß** eingestellt ist.



Das CAS verwendet den Parameter n_1. Wir wollen ihn k nennen.

f besitzt die Nullstellen $x_k = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dies sind **alle geraden Zahlen**.

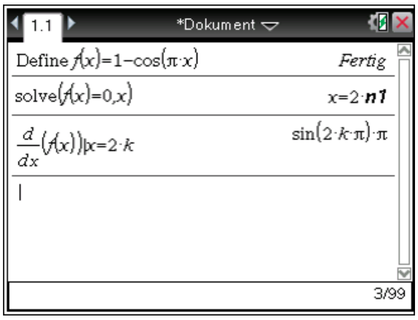
▶ x-Achse als Tangente nachweisen

Die x-Achse lässt sich beschreiben als waagerechte Gerade mit der Gleichung $y = 0$. Die Steigung m dieser Geraden ist $m = 0$. Zu zeigen ist also, dass die Steigung von f in allen Nullstellen Null ist.

(Anmerkung: Eigentlich wäre auch zu zeigen, dass alle Berührpunkte auf der x-Achse liegen. Da die Berührpunkte aber Nullstelen sind, erübrigt sich dies.)

Die Steigung einer Funktion wird dir immer gegeben durch die erste Ableitung. Zeige also, dass in allen Nullstellen $x_k = 2k$ gilt: $f'(2k) = 0$.

Berechne den Funktionswert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 2k$ mit dem CAS im `Calculator`-Modus.

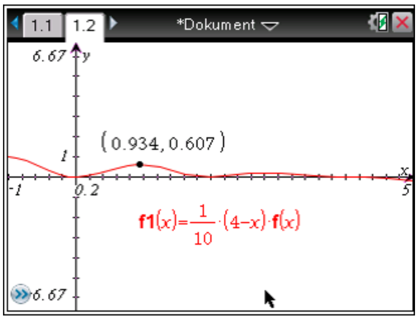


$\sin(x)$ wird bei ganzzahligen Vielfachen von π Null: $f'(2k) = 2 \cdot (2k \cdot \pi) \cdot \pi = 0 \cdot \pi = 0$

Damit ist gezeigt, dass K_g in allen Nullstellen die x-Achse als Tangente hat.

b) ### ▶ Höchsten Punkt der Bahn ermitteln (5VP)

Zeichne im `Graphs`-Modus deines CAS den Graphen von g und bestimme mit `menu → 6 → Maximum` die Koordinaten des Hochpunktes im Intervall $[0;4]$.

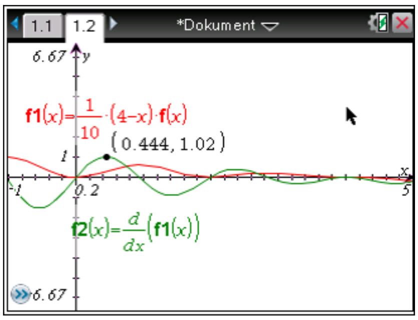


Das CAS liefert den Hochpunkt $H\,(0{,}934 \mid 0{,}607)$.
Der höchste Punkt der Minigolfbahn hat eine Höhe von etwa $0{,}607\,\mathrm{m}$.

▶ Stelle mit größter Steigung ermitteln

Die Steigung ist an einer bestimmten Stelle am größten. Das heißt, dass die Ableitungsfunktion an dieser Stelle ein Maximum besitzt.

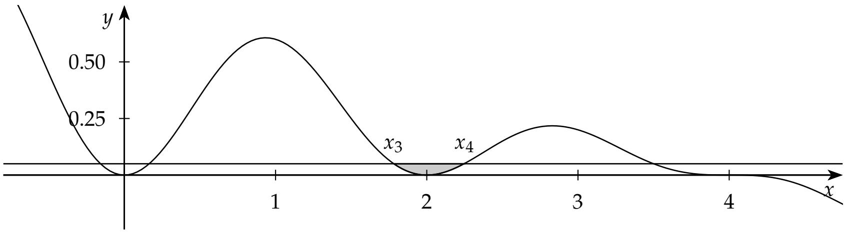
Zeichne im `Graphs`-Modus des CAS den Graphen von g' und bestimme mit `menu → 6 → 3: Maximum` das Maximum der ersten Ableitung im Intervall $[0;4]$.



Der Graph der Ableitung f' besitzt einen Hochpunkt $T\,(0{,}444 \mid 1{,}02)$

Der Ball überwindet nach ca. $0,44\,\text{m}$ (in x-Richtung gemessen) die größte Steigung.

▶ Menge des angesammelten Wassers berechnen



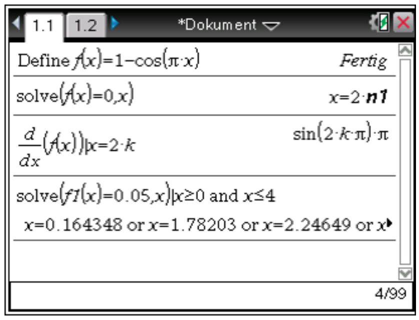
Die Bahn ist $1,25\,\text{m}$ breit. Du kannst dir das angesammelte Wasser als ein Prisma vorstellen mit einer Höhe von $1,25\,\text{m}$. Die Grund- bzw. Deckfläche des Prismas entspricht der Schnittfläche, die vom Graphen von g und der Geraden mit $y = 0,05$ (1 LE steht für 1 m) eingeschlossen wird.

Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst die Schnittstellen des Graphen von g mit der Geraden
- Berechne dann den Inhalt der Schnittfläche
- Berechne zuletzt das Volumen des Wassers nach der Volumenformel für Prismen

1. Schritt: Schnittstellen bestimmen

Gesucht sind die Werte für x, für die gilt: $g(x) = 0{,}05$. Diese Gleichung kannst du im `Calculator`-Modus deines CAS mit dem `solve`-Befehl lösen. Schränke den **Definitionsbereich** auf das Intervall $[0;4]$ ein. Den senkrechten Strich, sowie die Zeichen $\leq$ und $\geq$ findest du hierzu unter $\boxed{\texttt{ctrl} \;\rightarrow\; =}$.
Beachte dabei: Bei uns ist Funktion g als f_1 hinterlegt.

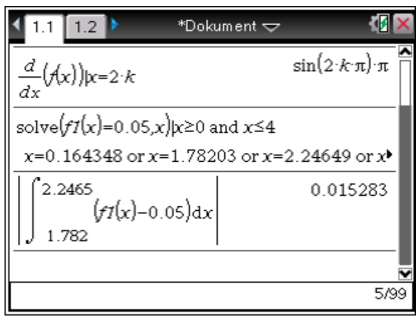


Das CAS liefert uns vier Schnittstellen. Ein Blick auf Skizze von oben zeigt uns, dass wir die **mittleren beiden** Schnittstellen suchen. Es ergeben sich damit die Schnittstellen $x_1 \approx 1,782$ $x_2 \approx 2,2465$.

2. Schritt: Inhalt der Grundfläche berechnen

Den Inhalt A der Querschnittsfläche des Wassers erhältst du über das Integral: $A = \int\limits_{1,782}^{2,2465} (g(x) - 0,05)\,\mathrm{d}x$. Um definitiv eine positive Maßzahl der Fläche zu erhalten, können wir das Integral zusätzlich in **Betragsstriche** setzen.

Du kannst es im `Calculator`-Modus deines CAS berechnen. Beachte wieder: Bei uns ist Funktion g als f_1 hinterlegt.
Es ergibt sich der Wert $A \approx 0,0153$.



3. Schritt: Volumen der Wassermenge berechnen

Die Minigolfbahn ist $1,25\,\text{m}$. Für das Volumen des angesammelten Wassers ergibt sich damit nach der Formel $V = G \cdot h$ der Wert:

$V = 0,0153\,\text{m}^2 \cdot 1,25\,\text{m} \approx 0,0191\,\text{m}^3$

Ein Liter entspricht $1\,\text{dm}^3$. Rechne deshalb das Ergebnis in dm^3 um:

$0,0191\,\text{m}^3 = 19,1\,\text{dm}^3$

Es haben sich etwa $19,1\,\text{l}$ Wasser zwischen den beiden Wellen angesammelt.

c) ▶ **Maximale Höhe des Balls bestimmen** (4VP)

Bestimme zunächst die Funktionsgleichung der Parabel, die die Flugbahn beschreibt. Berechne dann die Koordinaten des Hochpunktes dieser Parabel.

1. Schritt: Funktionsgleichung bestimmen

Die Flugbahn des Balls wird durch eine Parabel beschrieben, d.h. durch das Schaubild einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades. Der Ansatz lautet daher:

$p(x) = ax^2 + bx + c$

Es sind drei Eigenschaften der Parabel bekannt:

1. Sie geht durch den Punkt $S(0,5|g(0,5))$. $\Rightarrow$ $p(0,5) = g(0,5)$
2. Sie hat im Punkt S die Steigung $g'(0,5)$. $\Rightarrow$ $p'(0,5) = g'(0,5)$
3. Sie geht durch den Punkt $P(7|0)$. $\Rightarrow$ $p(7) = 0$

Du benötigst für die zweite Aussage noch die erste Ableitung von p:

$p'(x) = 2ax + b$

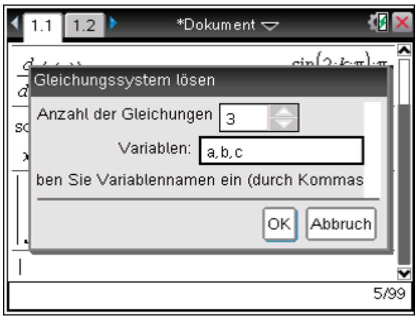
Mit dem CAS kannst du die Funktionswerte $g(0,5)$ und $g'(0,5)$ bestimmen:
$g(0,5) = 0,35$

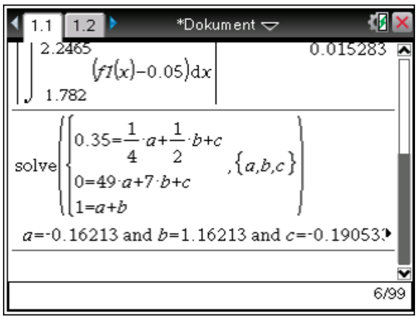
$g'(0,5) \approx 1$

Aus den Bedingungen von oben ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{I} & p(0,5) = 0,35 & = & a \cdot 0,5^2 & + & b \cdot 0,5 & + & c \\
\text{II} & p(7) = 0 & = & a \cdot 7^2 & + & b \cdot 7 & + & c \\
\text{III} & p'(0,5) = 1 & = & 2a \cdot 0,5 & + & b & & \\
\hline
\text{I} & 0,35 & = & \frac{1}{4}a & + & \frac{1}{2}b & + & c \\
\text{II} & 0 & = & 49a & + & 7b & + & c \\
\text{III} & 1 & = & a & + & b & &
\end{array}$$

Im `Calculator`-Modus deines CAS kannst du die Lösung des lineare Gleichungssystems über $\boxed{\text{menu} \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow \text{1: Gleichungssystem lösen}}$ berechnen.





Der CAS liefert die Lösungen $a \approx -0,162$, $b \approx 1,162$ und $c \approx -0,190$

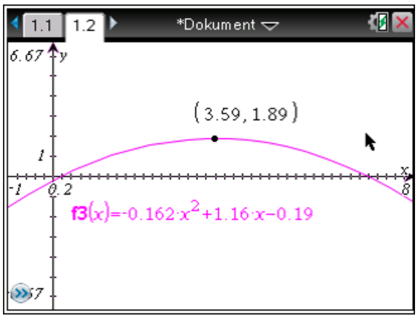
Somit lautet die Funktionsgleichung der Parabel, die die Flugbahn beschreibt $p(x) = -0,162 \cdot x^2 + 1,162 \cdot x - 0,190$.

2. Schritt: Hochpunkt der Parabel ermitteln

Zeichne die Parabel im `Graphs`-Modus deines CAS und bestimme mit $\boxed{\text{menu} \rightarrow 6 \rightarrow \text{3: Maximum}}$ die Koordinaten des Hochpunktes.

Das CAS liefert den Hochpunkt $H\,(3,59 \mid 1,89)$.

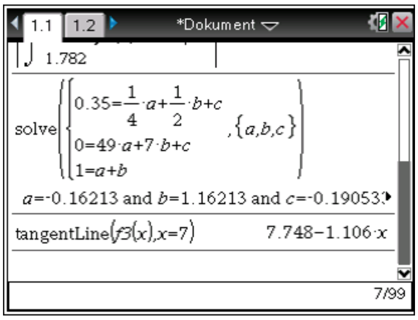
Die maximale Flughöhe des Balls beträgt ca. $1,89\,\text{m}$.



▶ Winkel berechnen

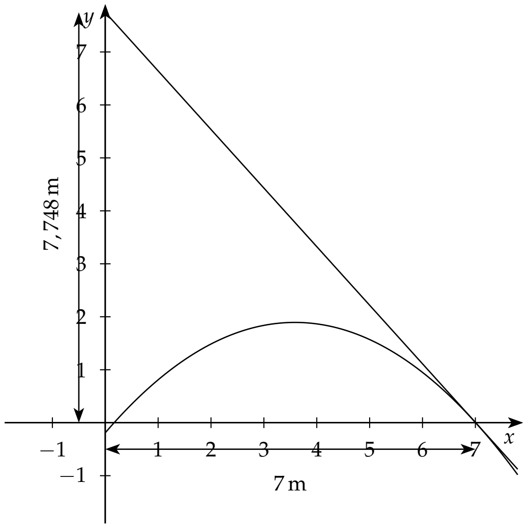
Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass der Ball im Punkt $P\,(7 \mid 0)$ auf den Boden trifft. Den Winkel, unter dem die Kurve in diesem Punkt auf die x-Achse trifft, kannst du über die **Tangente** an den Graphen von f in P berechnen.

Im `Calculator`-Modus kannst du die Gleichung der Tangente über den Befehl `tangentLine` bestimmen. Achte auf die Reihenfolge: $\boxed{\texttt{tangentLine(Funktion,Stelle)}}$. Die Gleichung der Parabel ist bei uns als f_3 hinterlegt.



Die Tangente im Punkt P an den Graphen von f besitzt die Gleichung $y = -1,106x + 7,748$.

Für den Winkel α, den die Tangente mit der x-Achse einschließt, gilt: $\tan(\alpha) = \dfrac{7{,}748}{7} = 1{,}10686$ und damit $\alpha = \tan^{-1}(1{,}10686) \approx 47{,}9036\,°$



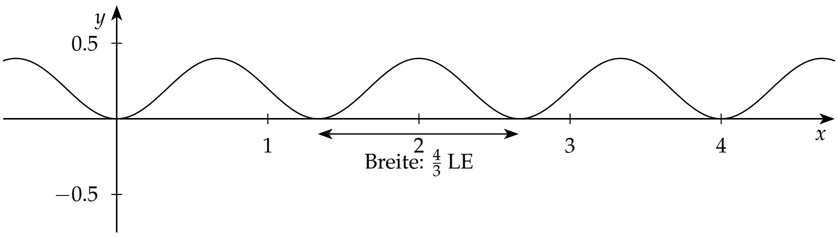
Der Ball trifft unter einem Winkel von etwa $47{,}9\,°$ auf den Boden.

d) ▶ **Term für neuen Bahnverlauf bestimmen** (4VP)

Fertige zunächst eine Skizze an, die den neuen Bahnverlauf möglichst genau beschreibt. Folgende Bedingungen sind in der Aufgabenstellung gegeben:

- drei 40 cm hohe Wellen (40 cm entsprechen 0,4 LE)
- Anfang und Ende der Bahn sollen **waagerecht** und wie bisher auf einer Höhe von 0 LE liegen

Ein mögliches Schaubild wäre folgendes:



Es bietet sich an, wieder eine **Kosinusfunktion** zur Beschreibung des neuen Bahnverlaufs zu benutzen. Angelehnt an den Funktionsterm von f lautet die Gleichung der neuen Funktion allgemein $y = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$.

Der Kosinus besitzt an der Stelle $x = 0$ normalerweise ein **Maximum**. Da unsere Funktion hier ein **Minimum** aufweist, muss der Wert für a ebenfalls wie in der Gleichung von f, ein **negativer** Wert sein.

Die **Höhe des Hindernisses** entspricht genau der **Amplitudenhöhe** der Kosinusfunktion und liegt bei 0,4. Für a ergibt sich damit $a = -0{,}4$.

Der Querschnitt der Bahn ist insgesamt 4 LE lang. Auf diesen 4 LE wurden **gleichmäßig** drei Minima verteilt. Somit beträgt der **Abstand** zwischen den Minima bei $\frac{4}{3}$ LE.

Der Abstand der Minima entspricht der **Periode** p unserer neuen Funktion. Für sie gilt: $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{4}{3}$. Diese Gleichung kannst du nach b auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{b} &= \frac{4}{3} && \mid \cdot b \cdot \frac{3}{4} \\ \frac{6\pi}{4} &= \frac{3}{2}\pi\ b \end{aligned}$$

Schließlich verläuft das Schaubild der neuen Funktion durch den **Ursprung** $(0 \mid 0)$. Setze die bisher berechneten Parameter ein in die allgemeine Funktionsgleichung und erhalte:

$y = -0,2 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi \cdot x\right) + c$

Setze z.B. die Koordinaten des Ursprungs ein und löse nach c auf:

$$\begin{aligned} 0 &= -0,2 \cdot \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi \cdot 0\right) + c && (\cos(0) = 1) \\ 0 &= -0,2 + c && \mid +0,2 \\ 0,2 &= c \end{aligned}$$

Damit lautet die Gleichung der Funktion, deren Schaubild den neuen Bahnverlauf beschreibt, $k(x) = y = -0,2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + 0,2$

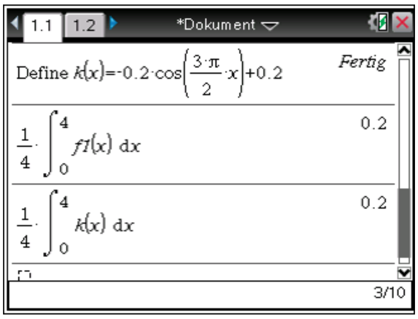
▶ Durchschnittliche Höhe der Bahnen vergleichen

Die **Höhe** der Bahnen entspricht den **Funktionswerten** der beiden Funktionen. Es ist nach dem **Mittelwert** $\overline{T}$ gefragt. Den Mittelwert der Funktionswerte einer Funktion f in einem Intervall $[a;b]$ erhältst du allgemein über die Gleichung: $\overline{T} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Berechne diese Werte für die beide Funktionen g und k. Als Integralgrenzen dienen jeweils $a = 0$ und $b = 4$.

In unserem Fall sind also folgende Werte zu berechnen:

$$\overline{T}_1 = \frac{1}{4-0}\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \overline{T}_2 = \frac{1}{4-0}\int_0^4 k(x)\,\mathrm{d}x$$



Die Integrale kannst du im `Calculator`-Modus des CAS berechnen. Bei uns ist, wie gesagt, Funktion g als Funktion f_1 hinterlegt.

Die durchschnittlichen Höhen der beiden Bahnen sind somit identisch.