a) **▶ Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a angeben** (8P)

Der Definitionsbereich von f_a umfasst alle Werte, die für x in den Funktionsterm von f_a eingesetzt werden dürfen. Bei der Scharfunktion f_a handelt es sich um eine Schar gebrochenrationaler Funktionen mit:

$$f_a(x) = \frac{a \cdot x^2 + 3}{2 \cdot x - 1}.$$

Beim Bestimmen der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ einer gebrochenrationalen Funktion betrachtest du den Nenner dieser Funktion. Bestimme alle Werte für x, für welche sich der Nenner der Funktion zu Null ergibt. Diese Werte müssen aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a dann ausgeschlossen werden, da eine Division durch Null nicht zulässig ist.

▶ Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$

Nun sollst du das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ in Abhängigkeit des Parameters a untersuchen. Weiterhin sollst du dabei die Fälle $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$ unterscheiden.

Die gesuchten Grenzwerte kannst du im Calculator-Modus deines CAS über den entsprechenden Befehl bestimmen. Füge beim Berechnen dieser jeweils entsprechende Nebenbedingungen ein, um eine Fallunterscheidung nach $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$ durchzuführen. Gesucht sind hier also die Grenzwerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ und für $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$.

▶ Bestimmen des gesuchten Parameterwertes

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Graph genau einer Scharfunktion auf einer Geraden liegt. Deine Aufgabe ist es hierbei, den zugehörigen Parameterwert für a zu bestimmen.

Die Funktionenschar f_a stellt für bestimmte a eine gebrochenrationale Funktion a dar. Um den Parameterwert für a zu bestimmen, für welchen der zugehörige Graph der Schar auf einer Geraden liegt, muss Parameter a so gewählt werden, dass sich der Term der Scharfunktion f_a zu einem linearen Term ergibt.

Das heißt, a muss so gewählt werden, dass

- der Nenner des Terms der Scharfunktion f_a eliminiert wird und
- der quadratische Teil des Zählers sich zu einem linearen ergibt.

Tipp: Versuche a so zu wählen, dass sich eben diese Bedingungen an den Funktionsterm von f_a durch geschicktes Erweitern und Kürzen ergeben. Denke dabei an die dritte binomische Formel.

b) **▶ Bestimmen des Parameters a und der Art des Extremums** (12P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass einer der Graphen G_a der Scharfunktion f_a einen Extrempunkt E mit dem Koordinaten $E(-1 \mid f_a(-1))$ besitzt. Deine Aufgabe ist es nun, den Parameterwert a jener Funktion f_a zu bestimmen, welche eben diesen Extrempunkt E besitzt. Des Weiteren ist es hier deine Aufgabe, die Art des Extremums festzustellen.

Bei einer Extremstelle x_E sind dabei folgende zwei Bedingungen immer erfüllt:

- Notwendige Bedingung: $f_a'(x_E) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_a''(x_E) \neq 0$.

Da dir bekannt ist, dass sich die Extremstelle bei $x_E = -1$ befindet, kannst du mit Hilfe der notwendigen Bedingung den gesuchten Parameterwert von a berechnen. Bestimme dazu zunächst die erste Ableitungsfunktion f_a' von f_a und ermittle, für welchen Parameterwert für a diese an der Stelle $x_E = -1$ die notwendige Bedingung für eine Extremstelle erfüllt. Bestimme anschließend mit Hilfe der zweiten Ableitung f_a'' von f_a und dem bestimmten Parameterwert für a die Art des Extremums bei $x_E = -1$, wobei für dieses gilt:

- $f_a''(x_E) < 0$: Bei $x_E = -1$ befindet sich ein lokales Maximum.
- $f_a''(x_E) > 0$: Bei $x_E = -1$ befindet sich ein lokales Minimum.

▶ Nachweisen, dass für $a > 0$ zwei Extremstellen existieren

Nun sollst du nachweisen, dass die Scharfunktion für Parameterwerte von a mit $a > 0$ zwei Extremstellen besitzt. Wie oben schon, lauten auch hier die Bedingungen an eine Extremstelle x_E:

- Notwendige Bedingung: $f_a'(x_E) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_a''(x_E) \neq 0$.

Im ersten Schritt zeigst du also, dass die erste Ableitungsfunktion zwei Nullstellen besitzt, wenn $a > 0$ gilt. Hast du das getan, so zeigst du im zweiten Schritt, dass diese Null- bzw. potentielle Extremstellen die hinreichende Bedingung erfüllen, falls $a > 0$ gilt. Verwende bei der Berechnung deinen CAS, die notwendigen Ableitungsfunktionen hast du im vorherigen Aufgabenteil bestimmt.

▶ Bestimmen des Parameterwertes so, dass die Geraden einen Abstand von 2 LE besitzen

Hier ist es nun deine Aufgabe, den Parameter a der Scharfunktion f_a so anzupassen, dass die zur y-Achse parallelen Geraden durch die beiden Extrempunkte der Schar einen Abstand von 2 LE besitzen. Beachte dabei, dass hier weiterhin $a > 0$ gelten muss.

Der Abstand zwischen zwei zur y-Achse parallelen Geraden bestimmt sich über deren Schnittpunkte mit der x-Achse. Die zur y-Achse parallelen Geraden, welche durch die Extrempunkte der Scharfunktion f_a verlaufen, besitzen in Abhängigkeit von a diese Gleichungen:

- Gerade durch Extremstelle x_1: $x = \dfrac{-(\sqrt{a+12} - \sqrt{a})}{2 \cdot \sqrt{a}}$
- Gerade durch Extremstelle x_2: $x = \dfrac{\sqrt{a+12} + \sqrt{a}}{2 \cdot \sqrt{a}}$

Der Abstand d zwischen diesen Geraden berechnet sich nach den obigen Annahmen über diese Formel:

$d = |x_1 - x_2|$.

c) ▶ **Nachweisen, dass alle Graphen G_a einen gemeinsamen Punkt und Tangente haben** (8P)

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass alle Graphen G_a einen gemeinsamen Schnittpunkt S haben und in diesem auch eine gemeinsame Tangente t. Haben alle Graphen G_a der Scharfunktion f_a einen gemeinsamen Schnittpunkt S, so sind die Koordinaten dieses Schnittpunkts unabhängig von Parameter a. Das heißt, schneidet man zwei Funktionen, so ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunkts S unabhängig vom Parameter a.

Willst du die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts S berechnen, so betrachtest du zwei unterschiedliche Funktionen der Schar f_a mit

- Funktion f_{a_1} mit beliebigen Parameterwert a_1,
- Funktion f_{a_2} mit beliebigen Parameterwert a_2 und
- $a_1 \neq a_2$.

Hast du diese Funktionen definiert, so bestimmst du deren Schnittstelle. Jene Schnittstelle, welche sich unabhängig von a_1 oder a_2 ergibt, entspricht der x-Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes S. Bestimme die gesuchte Schnittstelle durch Gleichsetzen der Funktionsterme von f_{a_1} und f_{a_2}. Verwende dazu deinen CAS und vergesse nicht die Nebenbedingung $a_1 \neq a_2$ zu berücksichtigen. Berechne zuletzt die vollständigen Koordinaten von S durch Einsetzen der x-Koordinaten von S in $f_a(x)$. Die zugehörige y-Koordinate von S muss ebenfalls unabhängig von Parameter a sein.

Anschließend sollst du nachweisen, dass die Graphen G_a im gemeinsamen Punkt S eine gemeinsame Tangente t haben.
Damit alle Graphen G_a bei S eine gemeinsame Tangente besitzen, müssen folgende zwei Bedingungen an der Stelle x_S erfüllt sein:

- Der Funktionswert aller Scharfunktionen muss bei x_S unabhängig von a sein.
- Der Ableitungswert bzw. die Steigung der Scharfunktionen f_a muss an der Schnittstelle $x_S = 0$ unabhängig von a sein, so dass alle f_a hier die gleiche Steigung besitzen.

Da du die erste Bedingung bereits im ersten Lösungsschritt dieser Aufgabe zeigen musst, musst du hier nur noch nachweisen, dass alle f_a bei $x_S = 0$ die gleiche Steigung besitzen. Berechne dazu den Ableitungswert $f'_a(x_S)$ und zeige, dass dieser unabhängig von a ist.

▶ **Ermitteln einer Gleichung der gemeinsamen Tangente t**

Nun sollst du eine Gleichung der gemeinsamen Tangente t ermitteln. Da Tangente t eine Gerade ist, besitzt diese in Abhängigkeit von m und b diese Gleichung:

$t(x) = m \cdot x + b$, wobei gilt:

- m: Steigung der Tangenten und
- b: y-Achsenabschnitt der Tangenten.

▶ **Zeigen, dass t_a die gegebene Gerade in ein und demselben Punkt Q schneidet**

Im letzten Aufgabenteil dieser Aufgabe sollst du zeigen, dass für $a \neq -12$ jede Tangente t_a an G_a im Punkt $P_a(-1 \mid f_a(-1))$ die Gerade g mit der Gleichung $g : y = -6 \cdot x - 3$ in ein und demselben Punkt Q schneidet.

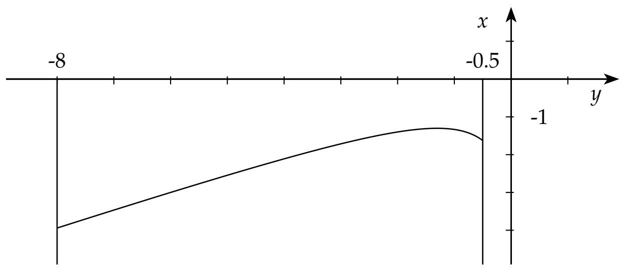
Willst du dies zeigen, so bestimmst du im ersten Schritt die Gleichung der Tangenten t_a an G_a im Punkt $P_a(-1 \mid f_a(-1))$. Verwende dazu den `tangentLine`-Befehl deines CAS. Dieser Befehl liefert dir den Funktionsterm einer Tangenten an einen beliebigen Graphen für jede gewünschte, in den Befehl eingetragene Stelle. Alternativ kannst du die Gleichung der Tangenten t_a auch über die allgemeine Tangentenformel bestimmen.

Hast du Tangente t_a bestimmt, so bestimmst du den Schnittpunkt Q dieser mit der Geraden g. Setze dazu die zugehörigen Geradengleichungen gleich und beachte die Nebenbedingung $a \neq -12$. Ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunkts Q dieser unabhängig von Parameter a, so hast du gezeigt, dass jede Tangente t_a an G_a im Punkt P_a die Gerade g in ein und demselben Punkt Q schneiden.

d) **▶ Berechnen der Querschnittsfläche des Brückenträgers** (6P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den Flächeninhalt der Querschnittsfläche eines Brückenträgers berechnen. Der Graph G_1 schließt diesen Flächeninhalt modellhaft mit den zur y-Achse parallelen Geraden $x = -8$ und $x = -0{,}5$ und der x-Achse ein. Der berechnete Flächeninhalt soll auf zwei Dezimalstellen gerundet werden.

Um den Flächeninhalt A_B der Querschnittsfläche zu berechnen, berechnest du das Integral von f_1 über dem Intervall [-8;-0,5] . Berechnen kannst du es über den Hauptsatz der Integralrechnung. Die Grenzen des Integrals sind $x_U = -8$ und $x_O = -0{,}5$, da die Querschnittsfläche durch die beiden Geraden $x = -8$ und $x = -0{,}5$, die parallel zur y-Achse laufen, begrenzt wird.



Da die zu berechnende Fläche unterhalb der x-Achse liegt, wie du der Abbildung oben entnehmen kannst, berechnest du den Betrag des Integrals, da negative Werte für Flächeninhalte keinen Sinn ergeben.

▶ Ermitteln eines $a > 0$, so dass sich die Querschnittsfläche verdoppelt

Der Aufgabenstellung kannst du hier entnehmen, dass, wenn man im gleichen Intervall statt G_1 andere Graphen G_a der Scharfunktion f_a zur Modellierung des Brückenträgers verwendet, es zu einer Veränderung der Querschnittsfläche kommt. Deine Aufgabe ist es nun dabei, den Parameter a mit $a > 0$ zu bestimmen, für welchen sich der beschriebene Flächeninhalt im Vergleich zu dem mithilfe von G_1 berechneten Flächeninhalt verdoppelt.

Oben hast du den Flächeninhalt der Querschnittsfläche des Brückenträgers über eine Integration über f_1 im Intervall $[-8; -0{,}5]$ bestimmt. Berechne diesen Flächeninhalt nun zunächst in Abhängigkeit von a. Integriere dazu über f_a im Intervall $[-8; -0{,}5]$. Hast du den von a abhängigen Flächeninhalt der Querschnittsfläche bestimmt, so setze den Term für diese gleich dem doppelten Flächeninhalt von oben. Über das Lösen dieser Gleichung bestimmst du den gesuchten Parameterwert für a.

e) ▶ **Mittlerer Anstieg von G_1 berechnen** (6P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den mittleren Anstieg des Graphen G_1 im Intervall $-8 \leq x \leq -4$ berechnen.

Den mittleren Anstieg m kannst du berechnen, indem du die Steigung der Sekante berechnest, die durch die beiden Punkte $P_1(-4|f_1(-4))$ und $P_2(-8|f_1(-8))$ verläuft. Wenn du die Steigung der Sekante berechnest, so bedeutet das, dass du die Steigung einer Geraden durch die beiden Punkte berechnest. Damit näherst du die Steigung von f_1 durch den mittleren Anstieg zwischen P_1 und P_2 im Intervall $[-8;-4]$ an.

Berechne also zum Lösen dieser Aufgabe zunächst die vollständigen Koordinaten von P_1 und P_2 und berechne dann über folgenden Ansatz den gesuchten mittleren Anstieg m:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, mit $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$.

▶ **Nachweis, dass sich mittlerer und maximaler Anstieg um weniger als 0,02 unterscheiden**

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass die untere Grenze des Brückenträgers aus Teilaufgabe d) auch als Gerade beschrieben werden kann, indem du nachweist, dass sich der mittlere Anstieg m und der maximale Anstieg von G_1 im Intervall $[-8;-4]$ um weniger als 0,02 unterscheiden.

Den mittleren Anstieg hast du oben schon berechnet, dieser war:

$m = \frac{70}{153} \approx 0,4575$.

Berechne hier also den maximalen Anstieg von f_1 im Intervall $[-8;-4]$. Das tust du, indem du zunächst die zweite Ableitung der Funktion f_1 betrachtest. Die zweite Ableitung von f_1 gibt die Steigung der Steigung an. Der maximale Anstieg von f_1 im untersuchten Intervall liegt folglich also da, wo die erste Ableitung f_1' ein Maximum bzw. die zweite Ableitung f_1'' eine Nullstelle besitzt.

Bestimme also zunächst die zweite Ableitungsfunktion f_1'' von f_1 und bestimme deren potentiellen Extremstellen von f_1' bzw. die Wendestellen von f_1. Betrachte hierzu folgende Bedingung für eine Wendestelle bei x_W:

- Notwendige Bedingung: $f_1''(x_W) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_1'''(x_W) \neq 0$.

Können jedoch keine Wendestellen von f_1 im betrachteten Intervall gefunden werden, so musst du dieses auf Randmaxima von f_1' untersuchen. Betrachte dazu die Steigung an den Rändern des angegebenen Intervalls.

Hast du die Stellen mit der maximalen Steigung bestimmt, so berechnest du mit Hilfe der ersten Ableitungsfunktion f_1' die Steigung an jener Extrem- bzw. Wendestelle, welche im betrachteten Intervall liegt. Somit hast du den maximalen Anstieg berechnet.

Wenn du den maximalen Anstieg berechnet hast, so bildest du die Differenz zwischen diesem und dem mittleren Anstieg. Ist dieser kleiner als 0,02, dann lässt sich die untere Begrenzung des Brückenträgers durch eine Gerade beschreiben.

Gehe also so vor:

1. Schritt: Die zweite und dritte Ableitung von f_1 bestimmen

2. Schritt: Maximalen Anstieg ermitteln

3. Schritt: Differenz ermitteln und beurteilen