a)

▶ Geradengleichung der Flugbahn angeben

Bei dieser Aufgabe fliegt ein Bussard im Sturzflug auf eine Maus zu.

Die Koordinaten des Startpunktes sowie der Richtungsvektor sind gegeben:

- Startpunkt: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix}$
- Richtungsvektor: $\overrightarrow{RV} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Damit kannst du eine Geradengleichung aufstellen, welche die Flugbahn des Bussards beschreibt.

$$\boxed{\boldsymbol{g:\quad \vec{x} = \overrightarrow{a} + r \cdot \overrightarrow{rv}}}$$

Du kannst die Koordinaten des Stützvektors $\overrightarrow{a}$ von A ablesen. Dieser bildet mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{rv}$ die Gerade g:

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{RV} = \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

▶ Koordinaten von *M* angeben

M stellt den Standort der Maus dar, den der Bussard im Sturzflug anvisiert.

Er stellt also den **Schnittpunkt der Geraden g mit der x-y-Ebene** dar. Diese hat die Gleichung $\boldsymbol{z = 0}$.

Den Schnittpunkt berechnest du, indem du die Zeilen der Geraden in die Koordinatengleichung der x-y-Ebene einsetzt.

Dadurch erhältst du den Parameter r, den du wiederum in die Gleichung von g einsetzen kannst, um den Schnittpunkt M zu erhalten.

g hat die **z-Koordinate** $z = 36 - 3r$.

Setze diese in die Ebenengleichung $z = 0$ ein, um r zu erhalten:

$$\begin{aligned} 36 - 3r &= 0 && \mid +3r \\ 36 &= 3r && \mid :3 \\ r &= 12 \end{aligned}$$

Einsetzen von $r = 12$ in die Geradengleichung von g liefert $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Maus befindet sich im Punkt M mit den Koordinaten $M(42 \mid 20 \mid 0)$.

▶ Bestimmen der Fluggeschwindigkeit

Nun soll die Geschwindigkeit v des Bussards in $\dfrac{km}{h}$ berechnet werden.

$$\boxed{\boldsymbol{v = \dfrac{\textbf{Weg}}{\textbf{Zeit}} = \dfrac{s}{t}}}$$

Berechne dazu zunächst den Betrag des Weges, des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AM}$, um die Formel verwenden zu können.

$$\boxed{\boldsymbol{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$$

Die Geschwindigkeit muss dann noch in die richtige Einheit umgerechnet werden:

$$\boxed{\boldsymbol{1\frac{m}{sec} = 3,6\frac{km}{h}}}$$

Der Weg, den der Bussard in 12 sec zurücklegt stellt den **Betrag des Verbindungsvektors** $\overrightarrow{AM}$ dar.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 42 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Du kannst den Betrag folgendermaßen berechnen:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{12^2 + 24^2 + (-36)^2} \approx 44,9\,\text{LE}$$

Da 1 LE 10 m entspricht, folgt daraus:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = s = 44,9\,\text{LE} = 449\,\text{m}$$

Setze den zurückgelegten Weg nun in die Formel ein:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{449\text{m}}{12\,sec} = 47,4\frac{\text{m}}{sec}$$

Umrechnen in $\dfrac{km}{h}$:

$$v = 37,4\frac{\text{m}}{sec} = 37,4\frac{\text{m}}{sec} \cdot 3,6 \approx 134,64\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Bussard erreicht bei dem Sturzflug eine Geschwindigkeit von 134,64 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b)

▶ Koordinatengleichung der Flugebene des Vogelschwarms angeben

Ein Vogelschwarm fliegt in einer Ebene E, die durch folgende Punkte aufgespannt wird:

$B(40\,|\,46\,|\,20)$

$C(36\,|\,26\,|\,22)$

$D(44\,|\,42\,|\,20)$

Du sollst eine Koordinatengleichung dieser Ebene angeben.

Diese hat die allgemeine Form $\boxed{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d}$.

Um den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene zu bestimmen, benötigst du zwei Vektoren, die in der Ebene liegen und verschieden sind. Du kannst beispielsweise $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BD}$ verwenden.

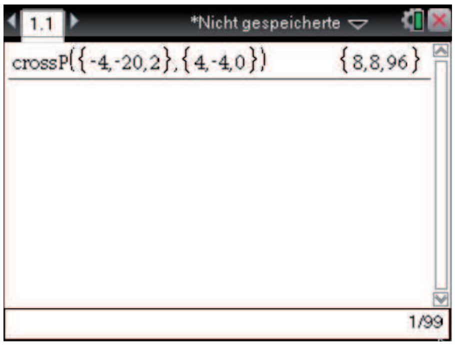
Den Normalenvektor berechnest du aus dem **Vektorprodukt** dieser zwei Vektoren.

Setze den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ in die allgemeine Koordinatengleichung ein.

Anschließend kannst du den Parameter d bestimmen, indem du die Koordinaten $x_{1,2,3}$ eines Punktes, der in der Ebene liegt, in die Gleichung einsetzt.

Bilde das **Vektorprodukt** der Vektoren mit dem CAS: Nutze dazu den `crossP`-Befehl, den du über Menü $\rightarrow 7 \rightarrow C \rightarrow 2$ erhältst.

Gib dann die Vektoren ein.



Daraus folgt:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Setze $\overrightarrow{n}$ nun in die allgemeine Koordinatengleichung ein:

$x_1 + x_2 + 12x_3 = d$

Ein Punkt, der in der Ebene liegt ist z.B. $B(40\,|\,46\,|\,20)$.

Durch Einsetzen seiner Koordinaten, erhältst du den Parameter d.

$$\begin{aligned} 1\cdot 40 + 1\cdot 46 + 12\cdot 20 &= d \\ d &= 326 \end{aligned}$$

Die Koordinatengleichung lautet somit:

$E: \quad x_1 + x_2 + 12x_3 = 326$

▶ Schnittpunkt mit Flugebene des Vogelschwarms bestimmen

Ein Vogelschwarm fliegt in der Ebene E mit der Gleichung $E:\ x + y + 12z = 326$, die vom Bussard durchflogen wird.

Du sollst den **Schnittpunkt der Geraden *g* mit der Ebenen *E*** berechnen.

Setze dazu im **1. Schritt** die Geradengleichung zu g zeilenweise in die Koordinatengleichung zu E ein und löse nach dem Parameter r auf, um diesen zu bestimmen.

Damit kann im **2. Schritt** der Schnittpunkt S berechnet werden, indem du ***r* in die Geradengleichung zu *g*** einsetzt.

1. Schritt: Parameter *r* bestimmen

Die Flugbahn des Bussards lässt sich durch die zuvor aufgestellte Gerade g beschreiben:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix} + r\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Das heißt, wir können die Punkte, in denen sich der Bussard während seines Flugs befindet, in Abhängigkeit von Parameter r angeben, indem wir die Koordinaten zeilenweise anhand der Geradengleichung ablesen.

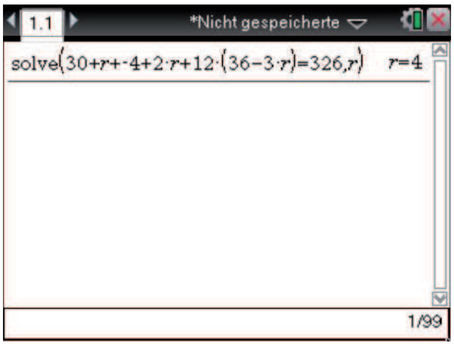
Du erhältst:

$x = 30 + r$

$y = -4 + 2r$

$z = 36 - 3r$

Setze diese in E ein und löse mit dem CAS. Nutze den `solve`-Befehl und gib die Gleichung wie dargestellt ein.



$$\begin{aligned} 30 + r + (-4 + 2r) + 12(36 - 3r) &= 326 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

Du erhältst, dass $r = 4$ gilt.

Setzen wir nun $r = 4$ wieder für den Parameter r in die Geradengleichung von g ein, so erhalten wir den Schnittpunkt von der Geraden g und der Ebene E.

2. Schritt: S bestimmen

Setze $r = 4$ in die Geradengleichung von g ein, um S zu erhalten:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Die Flugbahn des Bussards schneidet die Ebene der Zugvögel im Schnittpunkt $S(34\,|\,4\,|\,24)$.

▶ Schnittwinkel berechnen

Nun soll der Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E bestimmt werden.

Dazu kannst du folgende Formel verwenden:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{rv} \circ \vec{n}|}{|\overrightarrow{rv}| \cdot |\vec{n}|}}$$

- $\overrightarrow{rv}$: Richtungsvektor der Geraden
- $\vec{n}$: Normalenvektor der Ebene E

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Du hast alles gegeben, um den **Schnittwinkel** berechnen zu können:

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{rv} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{rv}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-3 \cdot 12)|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{146}} = \frac{33}{45,2}$$

$$\begin{aligned} \sin\alpha &\approx 0,73 \qquad | \sin^{-1} \\ \alpha &\approx 46,88° \end{aligned}$$

Der Bussard durchfliegt die Ebene E der Zugvögel unter einem Winkel von ungefähr $\alpha \approx 46,88°$.

c)

▸ Nachweisen, dass Flugzeug nicht auf Zugvögel treffen kann

Ein Flugzeug fliegt entlang der Geraden $f:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \\ 24 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Du sollst nun nachweisen, dass sich f und E nicht schneiden.

Setze wie im Aufgabenteil b) die Geradengleichung zeilenweise in die Ebenengleichung von E ein und löse nach dem Parameter t auf.

Erhältst du einen Wert für den Parameter t, so existiert ein Schnittpunkt zwischen der Geraden f und der Ebene E. Das würde bedeuten, dass das Flugzeug den Zugvogelschwarm durchfliegt.
Findest du jedoch kein t, so liegt **kein Schnittpunkt** vor und du hast die Aussage aus dem Aufgabentext nachgewiesen.

Wir können die Punkte, die f enthält, in Abhängigkeit des Parameters t angeben, indem wir zeilenweise ablesen:

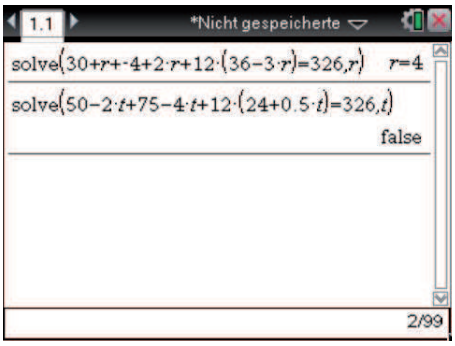
$$x = 50 - 2t$$

$$y = 75 - 4t$$

$$z = 24 + 0,5t$$

Setze diese in die Ebenengleichung zu E ein:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (50 - 2t) + 1 \cdot (75 - 4t) + 12 \cdot (24 + 0,5t) &= 326 \\ 413 &\neq 326 \end{aligned}$$



Auflösen liefert dir $413 = 326$.

Da diese Aussage **falsch** ist, existiert kein t, sodass die Gerade f die Ebene E schneidet.

Die Gerade f und die Ebene E liegen **parallel** zueinander.

▸ Abstand zwischen f und E berechnen

Anschließend soll der **Abstand zwischen f und E** berechnet werden.

Eine Ebene und eine Gerade können drei unterschiedliche Lagebeziehungen im dreidimensionalen Raum einnehmen:

- Echte Parallelität: Die Gerade verläuft **parallel** zur Ebene und hat keinen Schnittpunkt mit dieser.
- Identisch: Die Gerade ist in der Ebene **enthalten**. Sie haben folglich unendlich viele Schnittpunkte.
- Schnittpunkt: Die Gerade schneidet die Ebene in **einem** Punkt.

Zuvor hast du nachgewiesen, dass die Gerade und die Ebene E keinen Schnittpunkt besitzen. Du kannst also festhalten, dass die Gerade **parallel** zur Ebene verläuft. Damit hat jeder Punkt den gleichen Abstand zur Ebene E.

Um den Abstand zu bestimmen, kannst du hier eine abgewandelte Form der **Hesse'sche Normalenform** verwenden:

$$\boxed{\text{HNF:}\quad \boldsymbol{d} = \left|\frac{\boldsymbol{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - b}}{|\boldsymbol{\vec{n}}|}\right|}$$

Da du die Ebenengleichung in Koordinatenform gegeben hast, kannst du diese hier einsetzen.

Für $x_{1,2,3}$ setzt du anschließend einen beliebigen Punkt auf der Geraden f ein und berechnest d.

Setze also alle Angaben ein:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$d \quad = \quad \left|\frac{1x_1 + 1x_2 + 12x_3 - 326}{\sqrt{146}}\right|$$

Die Koordinaten eines Punktes der auf f liegt, sind z.B. die des Stützvektors von f.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Setze diesen nun in die Formel ein, um den Abstand zu erhalten.

$$d \quad = \quad \left|\frac{1 \cdot 50 + 1 \cdot 75 + 12 \cdot 24 - 326}{\sqrt{146}}\right| = \frac{87}{\sqrt{146}}$$

$$d \quad = \quad 7{,}2\,\text{LE}$$

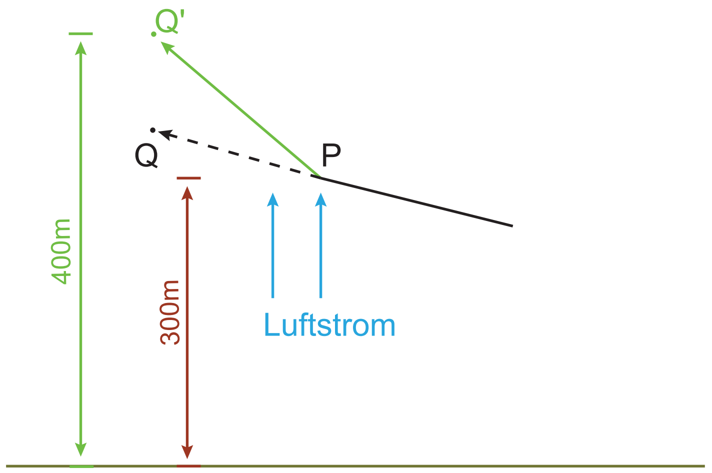
Mit 1 LE=10 m folgt:

Das Flugzeug fliegt ca. 72 m vom Vogelschwarm entfernt.

d)

▸ Wert *z* finden

Bei dieser Aufgabe wird ein Vogel durch einen Luftstrom von seiner eigentlichen Flugbahn abgelenkt und überfliegt einen ursprünglich angepeilten Punkt Q nun 400 m über dem Boden.



Anhand der z-Koordinate von $Q(22\,|\,-56\,|\,30)$ kannst du erkennen, dass der Vogel eigentlich 30 LE, also 300 m über dem Boden hätte ankommen müssen.

Beim neuen Punkt Q' muss also nur die z-Koordinate geändert werden.

In der Aufgabenstellung wird genannt, dass der Vogel den Punkt Q in einer Höhe von 400 m über dem Boden überfliegt. Es wird also lediglich die z-Koordinate auf 40 LE erhöht. Du kannst die Koordinaten des neuen Punktes Q' angeben mit: $Q'(22\,|\,-56\,|\,40)$.

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ'}$ beschreibt den **neuen Richtungsvektor** der Flugbahn.

Du sollst nun herausfinden, wie der Parameter z zu wählen ist, damit der Vogel durch die Flugbahnänderung den Punkt Q' erreicht.

Für den neuen Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ'}$ folgt:

$$\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 22 \\ -56 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 70 \\ -80 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Du kannst erkennen, dass der neue Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ'}$ ein **Vielfaches vom Vektor $\vec{r}$** darstellt.

$$\begin{pmatrix} -48 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$$

Anhand der x- und y-Koordinaten kannst du den Faktor v berechnen:

$$-48 = v \cdot (-6) \quad \Longrightarrow \quad v = 8$$
$$24 = v \cdot 3 \quad \Longrightarrow \quad v = 8$$

Dieser Faktor gilt folglich auch für die z-Koordinate:

$$12 = 8 \cdot z \quad \Longrightarrow \quad z = 1,5$$

Der Vektor $\vec{r}$ beschreibt für $z = 1,5$ die neue Richtung der Flugbahn.